Вопросы по курсу "Обыкновенные дифференциальные уравнения". Весна 2025 г. Первая часть.

Никита - Синий
Саня Skorososs123 - Темно красный
Андрей Forty - фиолетовый
Срок 15 мая включительно

1. Основные понятия об обыкновенных дифференциальных уравнениях (ОДУ) и системах ОДУ. Описание математических моделей движения точки и моделей динамики популяции.

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные неизвестной функции. Приведем некоторые примеры.

Пример 1.1.1. *Найти функцию $y(t)$ такую, что*

$$y'''(t) + (y'(t))^2 - e^t y(t) = 1 + t, \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Пример 1.1.2. *Найти функцию $u(t, x)$ такую, что*

$$u_{tt}(t, x) + u_t(t, x) = (t^2 + x)u(t, x), \quad a \leqslant t \leqslant b, \quad c \leqslant x \leqslant d.$$

Пример 1.1.3. *Найти функцию $u(t, x)$ такую, что*

$$u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) + u(t, x) = 0, \quad a \leqslant t \leqslant b, \quad c \leqslant x \leqslant d.$$

Уравнение, содержащее производные неизвестной функции только по одной независимой переменной, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением.*

Уравнение, содержащее производные неизвестной функции по нескольким независимым переменным, называется дифференциальным уравнением *в частных производных.*

Уравнения, приведенные в примерах 1.1.1 и 1.1.2, являются обыкновенными дифференциальными уравнениями, уравнение из примера 1.1.3 – дифференциальным уравнением в частных производных.

Порядком дифференциального уравнения называется наибольший порядок входящих в него производных.

Данный курс посвящен, в основном, обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка относительно неизвестной функции $y(t)$ называется уравнение

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad t \in [a, b],$$

где $F(t, y, p)$ – заданная функция трех переменных.

Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка относительно неизвестной функции $y(t)$ называется уравнение

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0, \quad t \in [a, b],$$

где $F(t, y, p_1, \dots, p_n)$ – заданная функция $n + 2$ переменных.

Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка, разрешенным относительно старшей производной, называется уравнение

$$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), \quad t \in [a, b], \tag{1.1}$$

где $F(t, y, p_1, \dots, p_{n-1})$ – заданная функция $n + 1$ переменной.

Наряду с обыкновенными дифференциальными уравнениями можно рассматривать системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть заданы функции $f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $y_1(t), \dots, y_n(t)$ называется система

$$\left\{ \begin{array}{lcll} y_1'(t) & = & f_1(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), & t \in [a, b], \\ y_2'(t) & = & f_2(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), & t \in [a, b], \\ & \dots & & \\ y_n'(t) & = & f_n(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), & t \in [a, b]. \end{array} \right. \tag{1.2}$$

При решении уравнения (1.1) или системы (1.2) часто приходится проводить операцию интегрирования. Процесс нахождения решений обычно называется *интегрированием* дифференциального уравнения или системы.

Всякое решение $(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$ системы (1.2) можно интерпретировать геометрически как кривую в $n + 1$ мерном пространстве переменных $(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$. Кривая $(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$ называется *интегральной кривой.* Пространство переменных $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ называется фазовым пространством, а определенная в этом пространстве кривая $(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$ – *фазовой траекторией.*

движение точки в пространстве

Рассмотрим процесс движения материальной точки с единичной массой вдоль прямой, которую будем считать осью x. Движение точки обусловлено тем, что на нее действует сила $f(t)$, зависящая от времени t. Обозначим положение точки в момент времени t через $x(t)$. В соответствии с вторым законом Ньютона получим, что

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t). \tag{1.4}$$

Таким образом, при заданной функции $f(t)$ движение точки описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка относительно неизвестной функции $x(t)$.

Решение уравнения (1.4) может быть легко найдено в результате двукратного интегрирования

$$x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{t_0}^{\tau} f(\theta) d\theta d\tau + c_1 + c_2 t, \tag{1.5}$$

где t_0 - некоторое заданное число, а c_1 и c_2 – произвольные постоянные. Из формулы (1.5) следует, что уравнение (1.4) не определяет однозначно процесс движения $x(t)$. Это легко понять и из физических соображений. Действительно, для однозначного определения положения точки $x(t)$ нужно знать её положение в некоторый момент времени t_0, то есть величину $x_0 = x(t_0)$ и ее скорость $v_0 = x'(t_0)$. В этом случае $c_1 = x_0$, $c_2 = v_0$ и положение точки $x(t)$ в любой момент времени определяется однозначно.

Уравнение (1.4) определяет простейший вариант движения точки вдоль прямой. Если сила, действующая на точку, зависит не только от времени, но также и от положения точки $x(t)$ и её скорости $x'(t)$, то обыкновенное дифференциальное уравнение, определяющее положение точки $x(t)$, будет иметь вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x(t), x'(t)),$$

где $f(t, x, p)$ – заданная функция трех переменных.

Рассмотрим теперь процесс движения материальной точки единичной массы в пространстве. Положение точки задается радиус-вектором $\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Движение точки обусловлено действием на нее силы, зависящей от времени, положения точки и ее скорости. Эта сила описывается вектор-функцией

$$\bar{f}(t, \bar{r}(t), \bar{r}'(t)) = (f_1(t, \bar{r}(t), \bar{r}'(t)), f_2(t, \bar{r}(t), \bar{r}'(t)), f_3(t, \bar{r}(t), \bar{r}'(t))).$$

Второй закон Ньютона дает уравнение для описания траектории $\bar{r}(t)$ движения точки

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{f}(t, \bar{r}(t), \bar{r}'(t)).$$

Записывая это векторное уравнение по компонентам, мы получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $x(t), y(t), z(t)$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= f_1(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)),\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= f_2(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)),\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= f_3(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)),
\end{aligned}$$

где $f_i(t, x, y, z, u, v, w)$, $i = 1, 2, 3$ – заданные функции семи переменных. Эта система не является нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако ее можно привести к нормальному виду введя дополнительные неизвестные функции

$$u(t) = x'(t), \quad v(t) = y'(t), \quad w(t) = z'(t).$$

В результате мы получим нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $x(t)$, $y(t)$,

$z(t)$, $u(t)$, $v(t)$ и $w(t)$

$$\begin{aligned}
x'(t) &= u(t),\\
y'(t) &= v(t),\\
z'(t) &= w(t),\\
u'(t) &= f_1(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)),\\
v'(t) &= f_2(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)),\\
w'(t) &= f_3(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)).
\end{aligned}$$

Очевидно, что для однозначного определения траектории точки в пространстве следует задать ее положение в некоторый момент времени t_0 и её скорость в этот же момент времени, то есть значения $x(t_0)$, $y(t_0)$, $z(t_0)$, $u(t_0)$, $v(t_0)$ $w(t_0)$.

динамика популяции.

Модели динамики популяций описывают процессы изменения численности биологических объектов во времени. Приведем простые примеры подобных моделей.

Рассмотрим популяцию некоторых биологических организмов. Обозначим их количество, нормированное относительно некоторого достаточно большого значения, в момент времени t через $u(t)$. Далее будем считать функцию $u(t)$ непрерывно дифференцируемой и предположим, что изменение количества организмов происходит за счет рождения и смерти. Если скорость рождаемости и скорость смертности пропорциональны количеству организмов $u(t)$, то

$$\frac{du}{dt} = au(t) - bu(t), \tag{1.6}$$

где a – постоянный коэффициент рождаемости, а b – постоянный коэффициент смертности организмов. Таким образом, мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $u(t)$. Решениями уравнения (1.6) являются функции

$$u(t) = C \exp\big\{(a-b)t\big\},$$

где C – произвольная постоянная. Для устранения подобной неоднозначности нужно знать количество организмов в некоторый момент времени, то есть величину $u_0 = u(t_0)$. В этом случае решение уравнения

(1.6) определяется однозначно и имеет вид

$$u(t) = u_0 \exp\{(a-b)(t-t_0)\}.$$

Рассмотрим теперь более сложную модель динамики популяций, которая описывает изменение численности биологических объектов двух видов: жертв и хищников. Обозначим количество жертв через $u(t)$, а количество хищников через $v(t)$. Различие в изменении количества жертв и хищников состоит в том, что жертвы являются кормом для хищников, а хищники не являются кормом для жертв. В связи с этим считаем, что скорость рождения жертв пропорциональна их количеству, а скорость их смертности пропорциональна произведению количества жертв на количество хищников. В результате мы получим следующую формулу для изменения количества жертв: $u'(t) = au(t) - bu(t)v(t)$, где a и b – постоянные положительные коэффициенты. С другой стороны, скорость рождаемости хищников зависит как от их количества, так и от количества корма, а скорость смертности зависит только от количества хищников. Эти предположения можно описать следующей формулой для изменения количества хищников: $v'(t) = cu(t)v(t) - dv(t)$, где c и d – постоянные положительные коэффициенты. Таким образом, мы получили следующую нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных функций $u(t)$ и $v(t)$

$$\begin{aligned} u'(t) &= au(t) - bu(t)v(t), \\ v'(t) &= cu(t)v(t) - dv(t). \end{aligned}$$

Для однозначного определения количества жертв и хищников кроме этих уравнений нужно задать в некоторый момент времени t_0 количество жертв $u_0 = u(t_0)$ и количество хищников $v_0 = v(t_0)$.

2. ОДУ в симметричном виде. Общий интеграл. Уравнение в полных дифференциалах (УПД). Теорема об общем интеграле УПД. Теорема о необходимом и достаточном условии того, что уравнение является УПД.

1.4.1. Уравнение в симметричном виде

Дифференциальным уравнением в симметричном виде (или в дифференциалах) называется уравнение

$$M(t,y)dt + N(t,y)dy = 0. \tag{1.11}$$

Предполагается, что функции $M(t,y)$ и $N(t,y)$ определены и непрерывны в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^2$ и подчиняются условию

$$|M(t,y)| + |N(t,y)| > 0, \quad \forall (t,y) \in D. \tag{1.12}$$

Уравнение (1.11) является более общим по сравнению с уравнением (1.7), поскольку последнее уравнение можно записать в виде (1.11) с функциями $M(t,y) = f(t,y)$, $N(t,y) = -1$.

Дадим определение решения уравнения (1.11). Так как переменные входят в него симметрично, то определение решения естественно дать в параметрической форме.

Определение 1.4.1. *Пара функций $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$ называется параметрическим решением уравнения в симметричном виде (1.11) на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$, если:*

1. *функции $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$ непрерывно дифференцируемы на $[\tau_1, \tau_2]$ и $|\varphi'(\tau)| + |\psi'(\tau)| > 0$, $\forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]$;*

2. *$(\varphi(\tau), \psi(\tau)) \in D$, $\forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]$;*

3. *при подстановке $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$ в (1.11) получается тождество, то есть*

$$M(\varphi(\tau), \psi(\tau))\varphi'(\tau) + N(\varphi(\tau), \psi(\tau))\psi'(\tau) = 0, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]. \tag{1.13}$$

Определение 1.4.2. *Уравнение*

$$\Phi(t, y, c) = 0$$

называется интегралом уравнения (1.11) в области D, если при любом значении $c \in C_0$ оно определяет решение уравнения (1.11).

Интеграл называется общим, если он определяет <u>*все*</u> *решения уравнения (1.11), то есть для любого решения уравнения (1.11) $t = \varphi(\tau), y = \psi(\tau)$, интегральная кривая которого лежит в D, найдется постоянная $\tilde{c} \in C_0$ такая, что $\Phi(\varphi(\tau), \psi(\tau), \tilde{c}) \equiv 0$.*

Так как общий интеграл определяет все решения дифференциального уравнения, то в том случае, когда его удается найти, задача поиска решений дифференциального уравнения считается решенной. Рассмотрим примеры.

Наиболее просто интегрируются дифференциальные уравнения в симметричном виде, левая часть которых представляет собой полный дифференциал некоторой функции.

Определение 1.4.3. *Дифференциальное уравнение в симметричном виде (1.11) называется уравнением в полных дифференциалах в области D, если существует непрерывно дифференцируемая в D функция $V(t, y)$ такая, что $\left|\dfrac{\partial V(t,y)}{\partial t}\right| + \left|\dfrac{\partial V(t,y)}{\partial y}\right| > 0$ и*

$$M(t, y) = \frac{\partial V(t,y)}{\partial t}, \quad N(t, y) = \frac{\partial V(t,y)}{\partial y}, \quad \forall (t, y) \in D. \tag{1.14}$$

Теорема 1.4.1. *Уравнение в полных дифференциалах вида (1.11) имеет в области D общий интеграл*

$$V(t, y) = C. \tag{1.15}$$

Доказательство. Согласно определению общего интеграла 1.4.2 проверим сначала, что уравнение (1.15) является интегралом. Рассмотрим уравнение (1.15) в окрестности произвольной точки $(t_0, y_0) \in D$ и положим $C_0 = V(t_0, y_0)$. Из условия (1.12) и представления (1.14) имеем:

$$\text{либо} \quad \frac{\partial V(t_0, y_0)}{\partial t} = M(t_0, y_0) \neq 0, \quad \text{либо} \quad \frac{\partial V(t_0, y_0)}{\partial y} = N(t_0, y_0) \neq 0.$$

Пусть для определенности справедливо второе из выписанных неравенств. Тогда по теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки t_0 существует *единственная* непрерывно дифференцируемая функция $y = g(t)$ такая, что $y_0 = g(t_0)$ и

$$V(t, g(t)) = C_0 \tag{1.16}$$

в рассматриваемой окрестности. Если теперь взять дифференциалы левой и правой частей равенства (1.16), то

$$\begin{aligned} dC_0 = 0 = dV(t, g(t)) = \frac{\partial V(t, y)}{\partial t} dt + \frac{\partial V(t, g(t))}{\partial y} dg(t) = \\ = M(t, g(t))dt + N(t, g(t))g'(t)dt, \end{aligned}$$

то есть $t = t$ и $y = g(t)$ является параметрическим решением уравнения (1.11). Следовательно, уравнение (1.15) является интегралом дифференциального уравнения (1.11).

Покажем, что уравнение (1.15) является общим интегралом дифференциального уравнения (1.11). Пусть $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ – произвольное решение (1.11) такое, что $(\varphi(\tau), \psi(\tau)) \in D$ при $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$. Покажем, что найдется постоянная C такая, что

$$V(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = C, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2].$$

Из условия 1.14 для всех $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ имеем

$$\frac{d}{d\tau} V(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = M(\varphi(\tau), \psi(\tau))\varphi'(\tau) + N(\varphi(\tau), \psi(\tau))\psi'(\tau).$$

Так как $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$ – параметрическое решение (1.11), то выполнено уравнение (1.13), а значит

$$\frac{d}{d\tau} V(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = 0, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2].$$

Следовательно,

$$V(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = C, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2],$$

и уравнение (1.15) – общий интеграл дифференциального уравнения (1.11). □

Замечание 1.4.1. *Из доказательства теоремы 1.4.1 следует, что через любую точку $(t_0, y_0) \in D$ проходит единственная интегральная кривая уравнения в полных дифференциалах (1.11), (1.14).*

Теорема 1.4.2. *Пусть функции $M(t,y)$, $N(t,y)$ и их частные производные первого порядка непрерывны в прямоугольнике D со сторонами, параллельными координатным осям, и выполнено условие (1.12). Тогда для того, чтобы уравнение (1.11) было уравнением в полных дифференциалах в D, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{\partial M(t,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(t,y)}{\partial t}, \quad \forall (t,y) \in D. \tag{1.17}$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть уравнение (1.11) является уравнением в полных дифференциалах. Тогда существует функция $V(t,y)$ такая, что выполнены равенства (1.14). Дифференцируя первое из них по y, а второе по t, получим равенства

$$\frac{\partial M(t,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 V(t,y)}{\partial t \partial y}, \quad \frac{\partial N(t,y)}{\partial t} = \frac{\partial^2 V(t,y)}{\partial y \partial t},$$

из которых следует (1.17).

Докажем достаточность. Пусть выполнено условие (1.17). Рассмотрим функцию

$$V(t,y) = \int\limits_{t_0}^{t} M(\xi, y) d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} N(t_0, \eta) d\eta,$$

где (t_0, y_0) – фиксированная точка прямоугольника D. Дифференцируя по t, получим $\dfrac{\partial V(t,y)}{\partial t} = M(t,y)$. Дифференцируя по y и учитывая

условие (1.17), имеем

$$\frac{\partial V(t,y)}{\partial y} = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial M(\xi,y)}{\partial y} d\xi + N(t_0,y) =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial N(\xi,y)}{\partial t} d\xi + N(t_0,y) = N(t,y).$$

Следовательно, $V(t,y)$ удовлетворяет определению 1.4.3 и уравнение (1.11) является уравнением в полных дифференциалах.

3. Задача Коши для ОДУ первого порядка, разрешенного относительно производной. Лемма Гронуолла-Беллмана. Теорема единственности решения задачи Коши.

Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) первого порядка, разрешённого относительно производной, формулируется следующим образом: Дано: Дифференциальное уравнение: y` = f(x,y)

Y0 = f(x0) y0, x0 - заданные числа

Пусть функция $f(t,y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике

$$\Pi = \{(t,y): \quad |t-t_0| \leqslant T, \quad |y-y_0| \leqslant A\}.$$

Рассмотрим на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ дифференциальное уравнение

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{2.1}$$

с условием

$$y(t_0) = y_0. \tag{2.2}$$

Требуется определить функцию $y(t)$, удовлетворяющую уравнению (2.1) и условию (2.2). Эта задача называется задачей с начальным условием или задачей Коши.

Рассмотрим отрезок $[t_1, t_2]$ такой, что $t_0 - T \leqslant t_1 < t_2 \leqslant t_0 + T$, $t_0 \in [t_1, t_2]$.

Определение 2.1.1. *Функция $\bar{y}(t)$ называется решением задачи Коши (2.1), (2.2) на отрезке $[t_1, t_2]$, если: $\bar{y}(t) \in C^1[t_1, t_2]$, $|\bar{y}(t) - y_0| \leqslant A$ для $t \in [t_1, t_2]$, $\bar{y}(t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) для $t \in [t_1, t_2]$ и условию (2.2).*

2.1.1. Редукция к интегральному уравнению

Покажем, что решение задачи с начальным условием (2.1), (2.2) эквивалентно решению некоторого интегрального уравнения.

Рассмотрим на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ уравнение относительно неизвестной функции $y(t)$

$$y(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau. \tag{2.3}$$

Такое уравнение называется интегральным, поскольку неизвестная функция $y(t)$ входит под знак интеграла.

Лемма 2.1.1. *Функция $\bar{y}(t)$ является решением задачи Коши (2.1), (2.2) на отрезке $[t_1, t_2]$ тогда и только тогда, когда $\bar{y}(t) \in C[t_1, t_2]$, $|\bar{y}(t) - y_0| \leqslant A$ для $t \in [t_1, t_2]$ и $\bar{y}(t)$ удовлетворяет уравнению (2.3) для $t \in [t_1, t_2]$.*

Доказательство. Пусть функция $\bar{y}(t)$ является решением задачи с начальным условием (2.1), (2.2) на отрезке $[t_1, t_2]$. Из определения 2.1.1 следует, что $\bar{y}(t) \in C[t_1, t_2]$, $|\bar{y}(t) - y_0| \leqslant A$ для $t \in [t_1, t_2]$. Покажем, что $\bar{y}(t)$ удовлетворяет уравнению (2.3) для $t \in [t_1, t_2]$. Интегрируя уравнение (2.1) от t_0 до t, получим

$$\int_{t_0}^{t} \bar{y}'(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t} f(\tau, \bar{y}(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Учитывая начальное условие (2.2), имеем

$$\bar{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \bar{y}(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Следовательно, функция $\bar{y}(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (2.3) при $t \in [t_1, t_2]$.

Пусть функция $\bar{y}(t)$ такова, что $\bar{y}(t) \in C[t_1, t_2]$, $|\bar{y}(t) - y_0| \leqslant A$ для $t \in [t_1, t_2]$ и $\bar{y}(t)$ удовлетворяет уравнению (2.3) для $t \in [t_1, t_2]$, то есть

$$\bar{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \bar{y}(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_1, t_2]. \tag{2.4}$$

Покажем, что $\bar{y}(t)$ является решением задачи с начальным условием (2.1), (2.2).

Положив в (2.4) $t = t_0$, получим, что $\bar{y}(0) = y_0$. Следовательно условие (2.2) выполнено. Так как функция $\bar{y}(t)$ непрерывна на $[t_1, t_2]$, то правая часть равенства

$$\bar{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \bar{y}(\tau)) d\tau$$

непрерывно дифференцируема на $[t_1, t_2]$ как интеграл с переменным верхним пределом t от непрерывной функции $f(\tau, \bar{y}(\tau)) \in C[t_1, t_2]$. Следовательно, $\bar{y}(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_1, t_2]$. Дифференцируя (2.4), получим, что $\bar{y}(t)$ удовлетворяет (2.1), и лемма 2.1.1 доказана. $\square$

Докажем единственность решения задачи Коши (2.1), (2.2). Для этого нам потребуется следующая лемма, обычно называемая леммой Гронуолла-Беллмана.

Лемма 2.1.2. *Пусть функция $z(t) \in C[a, b]$ и такова, что*

$$0 \leqslant z(t) \leqslant c + d \left| \int\limits_{t_0}^{t} z(\tau) d\tau \right|, \quad t \in [a, b], \tag{2.5}$$

где постоянная c неотрицательна, постоянная d положительна, а t_0 – произвольное фиксированное число на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$z(t) \leqslant c e^{d|t-t_0|}, \quad t \in [a, b]. \tag{2.6}$$

Доказательство. Рассмотрим $t \geqslant t_0$. Введем функцию

$$p(t) = \int\limits_{t_0}^{t} z(\tau) d\tau, \quad t \in [t_0, b].$$

Тогда $p'(t) = z(t) \geqslant 0$, $p(t_0) = 0$. Из (2.5) следует, что $p'(t) \leqslant c + dp(t)$, $t \in [t_0, b]$. Умножив это неравенство на $e^{-d(t-t_0)}$, получим

$$p'(t) e^{-d(t-t_0)} \leqslant c e^{-d(t-t_0)} + dp(t) e^{-d(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, b].$$

Это неравенство можно переписать так

$$\frac{d}{dt} \left(p(t) e^{-d(t-t_0)} \right) \leqslant c e^{-d(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, b].$$

Проинтегрировав от t_0 до t , получим

$$p(t) e^{-d(t-t_0)} - p(t_0) \leqslant c \int\limits_{t_0}^{t} e^{-d(\tau - t_0)} d\tau = \frac{c}{d} \left(1 - e^{-d(t-t_0)} \right), \quad t \in [t_0, b].$$

Учитывая то, что $p(t_0) = 0$, имеем $dp(t) \leqslant ce^{d(t-t_0)} - c$. Следовательно,

$$z(t) \leqslant c + dp(t) \leqslant c + ce^{d(t-t_0)} - c = ce^{d(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, b]$$

и неравенство (2.6) для $t \in [t_0, b]$ доказано.

Докажем неравенство (2.6) для $t \in [a, t_0]$. Перепишем неравенство (2.5) следующим образом

$$0 \leqslant z(t) \leqslant c - d \int_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau = c + d \int_{t}^{t_0} z(\tau)d\tau, \quad t \in [a, t_0].$$

Обозначим

$$q(t) = \int_{t}^{t_0} z(\tau)d\tau, \quad t \in [a, t_0].$$

Тогда $q'(t) = -z(t) \leqslant 0$, $q(t_0) = 0$. Из неравенства (2.5) следует, что $-q'(t) \leqslant c + dq(t)$, $t \in [a, t_0]$. Умножив это неравенство на $e^{-d(t_0-t)}$, получим

$$-q'(t)e^{-d(t_0-t)} \leqslant ce^{-d(t_0-t)} + dq(t)e^{-d(t_0-t)}, \quad t \in [a, t_0].$$

Это неравенство можно переписать так

$$-\frac{d}{dt}\left(q(t)e^{-d(t_0-t)}\right) \leqslant ce^{-d(t_0-t)}, \quad t \in [a, t_0].$$

Проинтегрировав от t до t_0 , получим

$$q(t)e^{-d(t_0-t)} - q(t_0) \leqslant c \int_{t}^{t_0} e^{-d(t_0-\tau)}d\tau = \frac{c}{d}\left(1 - e^{-d(t_0-t)}\right), \quad t \in [a, t_0].$$

Следовательно, $dq(t) \leqslant ce^{d(t_0-t)} - c$. А значит

$$z(t) \leqslant c + dq(t) \leqslant c + ce^{d(t_0-t)} - c = ce^{d|t-t_0|}, \quad t \in [a, t_0]$$

и неравенство (2.6) для $t \in [a, t_0]$ доказано, что и завершает доказательство леммы 2.1.2. $\square$

2.1.3. Условие Липшица

Сформулируем теперь важное для дальнейших исследований условие Липшица.

Определение 2.1.2. *Функция $f(t,y)$, заданная в прямоугольнике Π, удовлетворяет в Π условию Липшица по y, если*

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|, \quad \forall (t,y_1),(t,y_2) \in \Pi,$$

где L – положительная постоянная.

Замечание 2.1.1. *Если функции $f(t,y)$ и $f_y(t,y)$ определены и непрерывны в Π, то $f(t,y)$ удовлетворяет в Π условию Липшица по y. Действительно, так как $f_y(t,y)$ непрерывна в Π, то найдется положительная константа L такая, что*

$$|f_y(t,y)| \leqslant L, \quad \forall (t,y) \in \Pi.$$

Тогда из формулы Лагранжа следует, что

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |f_y(t,\theta)(y_1 - y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|, \quad \forall (t,y_1),(t,y_2) \in \Pi.$$

Замечание 2.1.2. *Функция $f(t,y)$ может быть не дифференцируема по y, но удовлетворять условию Липшица. Рассмотрим, например, функцию $f(t,y) = (t-t_0)|y-y_0|$. Очевидно, что она не дифференцируема при $y = y_0, t \neq t_0$, однако для всех $(t,y_1),(t,y_2) \in \Pi$ имеем*

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |t - t_0| \cdot \big||y_1 - y_0| - |y_2 - y_0|\big| \leqslant T|y_1 - y_2|.$$

Замечание 2.1.3. *Функция $f(t,y)$ может быть непрерывной по y, но не удовлетворять условию Липшица. Рассмотрим, например, функцию*

$$f(y) = \begin{cases} \sqrt{y}, & 0 \leqslant y \leqslant 1; \\ -\sqrt{|y|}, & -1 \leqslant y \leqslant 0. \end{cases}$$

Очевидно, что она непрерывна на отрезке $[-1,1]$. Покажем, что она не удовлетворяет условию Липшица. Предположим, что оно выполнено. Тогда существует такая постоянная L, что

$$|\sqrt{y}_1 - \sqrt{y}_2| \leqslant L|y_1 - y_2|, \quad \forall y_1, y_2 \in [-1,1].$$

Пусть $y_1 > 0$, $y_2 = 0$. Тогда $y_1 \leqslant L^2 y_1^2$, и, взяв $0 < y_1 < L^{-2}$, мы получим противоречие.

Докажем теперь теорему единственности решения задачи Коши (2.1), (2.2).

Теорема 2.1.1. *Пусть функция $f(t, y)$ непрерывна в Π и удовлетворяет в Π условию Липшица по y. Если $y_1(t)$, $y_2(t)$ – решения задачи Коши (2.1), (2.2) на отрезке $[t_1, t_2]$, то $y_1(t) = y_2(t)$ для $t \in [t_1, t_2]$.*

Доказательство. Так как $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – решения задачи Коши (2.1), (2.2), то из леммы 2.1.1 следует, что они являются решениями интегрального уравнения (2.3). То есть

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_1(\tau))d\tau, \quad t \in [t_1, t_2], \\ y_2(t) &= y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_2(\tau))d\tau, \quad t \in [t_1, t_2]. \end{aligned}$$

Вычитая второе уравнение из первого и оценивая разность по модулю, получаем

$$|y_1(t) - y_2(t)| = \left| \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_1(\tau))d\tau - \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_2(\tau))d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_{t_0}^{t} |f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau))|d\tau \right|, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Используя условие Липшица, имеем

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leqslant L \left| \int\limits_{t_0}^{t} |y_1(\tau) - y_2(\tau)|d\tau \right|, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Обозначив $z(t) = |y_1(t) - y_2(t)|$, перепишем последнее неравенство следующим образом

$$0 \leqslant z(t) \leqslant L \left| \int\limits_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau \right|, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Применяя лемму Гронуолла-Беллмана 2.1.2 с $c = 0$ и $d = L$, имеем $z(t) = 0$, $t \in [t_1, t_2]$. Следовательно, $y_1(t) = y_2(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ и теорема 2.1.1 доказана. $\square$

Замечание 2.1.4. *Если условие Липшица не выполнено, то решение задачи (2.1), (2.2) может не быть единственным. Например, если*

$$f(y) = \begin{cases} \sqrt{y}\ , & 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ -\sqrt{|y|}, & -1 \leqslant y \leqslant 0, \end{cases}$$

то задача Коши $y'(t) = f(y(t))$, $y(0) = 0$ имеет решения

$$y_1(t) = 0, \quad y_2(t) = \begin{cases} t^2/4, & 0 \leqslant t \leqslant 2, \\ -t^2/4, & -2 \leqslant t \leqslant 0. \end{cases}$$

4. Теорема существования решения задачи Коши для ОДУ первого порядка, разрешенного относительно производной.

Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) первого порядка, разрешенного относительно производной, формулируется следующим образом: Дано: Дифференциальное уравнение: y` = f(x,y)
Y0 = f(x0) y0, x0 - заданные числа

Перейдем к доказательству существования решения задачи с начальным условием. Следует отметить, что мы можем доказать теорему существования не на всем исходном отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$, а на некотором, вообще говоря, меньшем. Поэтому эта теорема часто называется локальной теоремой существования решения задачи Коши.

Теорема 2.1.2. *Пусть функция $f(t, y)$ непрерывна в Π, удовлетворяет в Π условию Липшица по y и*

$$|f(t, y)| \leqslant M, \quad (t, y) \in \Pi.$$

Тогда на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$, где

$$h = \min\Big\{T, \frac{A}{M}\Big\},$$

существует функция $y(t)$ такая, что $y(t) \in C^1[t_0 - h, t_0 + h]$, $|y(t) - y_0| \leqslant A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$,

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h], \tag{2.7}$$

$$y(t_0) = y_0. \tag{2.8}$$

Доказательство. Из леммы 2.1.1 следует, что для доказательства теоремы достаточно доказать существование функции $y(t) \in C[t_0-h, t_0+h]$ такой, что $|y(t) - y_0| \leqslant A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, и являющейся решением интегрального уравнения

$$y(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h]. \tag{2.9}$$

Проведем доказательство, используя метод последовательных приближений. Рассмотрим последовательность функций $y_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ таких, что $y_0(t) = y_0$,

$$y_{k+1}(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_k(\tau))d\tau, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h], k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.10}$$

Покажем, используя метод математической индукции, что для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполнено

$$y_k(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h], \quad |y_k(t) - y_0| \leqslant A, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Для $k = 0$ это очевидно справедливо, поскольку $y_0(t) = y_0$.

Пусть это верно для $k = m$. То есть

$$y_m(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h], \quad |y_m(t) - y_0| \leqslant A, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Покажем, что

$$y_{m+1}(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_m(\tau))d\tau, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h] \tag{2.11}$$

такова, что $y_{m+1}(t) \in C[t_0-h, t_0+h]$ и $|y_{m+1}(t)-y_0| \leqslant A$, $t \in [t_0-h, t_0+h]$.

Действительно, так как $|y_m(t)-y_0| \leqslant A$, $t \in [t_0-h, t_0+h]$, то функция $f(t, y_m(t))$ определена и непрерывна на $[t_0 - h, t_0 + h]$. Значит интеграл, стоящий в правой части (2.11), определен и непрерывен при $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Следовательно, $y_{m+1}(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$.

Оценим

$$|y_{m+1}(t)-y_0| = \left|\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_m(\tau))d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{t_0}^{t} |f(\tau, y_m(\tau))|d\tau\right| \leqslant \left|\int\limits_{t_0}^{t} M d\tau\right| \leqslant Mh \leqslant M\cdot\frac{A}{M} = A, \quad t\in[t_0-h, t_0+h].$$

Таким образом $|y_{m+1}(t)-y_0| \leqslant A$, $t\in[t_0-h, t_0+h]$. Следовательно, мы показали что все $y_k(t)\in C[t_0-h, t_0+h]$ и $|y_k(t)-y_0| \leqslant A$, $t\in[t_0-h, t_0+h]$, $k=0,1,2,\ldots$.

Докажем, используя метод математической индукции, что для $t\in[t_0-h, t_0+h]$ справедливы неравенства

$$|y_{k+1}(t)-y_k(t)| \leqslant AL^k\,\frac{|t-t_0|^k}{k!}, \quad k=0,1,2,\ldots. \tag{2.12}$$

Для $k=0$ имеем

$$|y_1(t)-y_0(t)| = \left|y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_0)d\tau - y_0\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_0)d\tau\right| \leqslant Mh \leqslant A, \quad t\in[t_0-h, t_0+h],$$

то есть при $k=0$ оценка (2.12) верна.

Пусть неравенство (2.12) справедливо для $k=m-1$. Покажем, что тогда оно справедливо при $k=m$. Действительно

$$|y_{m+1}(t)-y_m(t)| = \left|y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_m(\tau))d\tau - y_0 - \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_{m-1}(\tau))d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{t_0}^{t} |f(\tau, y_m(\tau)) - f(\tau, y_{m-1}(\tau))|d\tau\right|, \quad t\in[t_0-h, t_0+h].$$

Используя условие Липшица и неравенство (2.12) для $k = m - 1$, получим

$$|y_{m+1}(t) - y_m(t)| \leqslant L \left| \int_{t_0}^{t} |y_m(\tau) - y_{m-1}(\tau)| d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant L \left| \int_{t_0}^{t} AL^{m-1} \frac{|\tau - t_0|^{m-1}}{(m-1)!} d\tau \right| = AL^m \frac{|t - t_0|^m}{m!}, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Следовательно, оценка (2.12) справедлива при $k = m$, и значит она доказана для любого $k \in \mathbb{N}$.

Представим функции $y_k(t)$ как частичные суммы ряда

$$y_k(t) = y_0 + \sum_{n=1}^{k} (y_n(t) - y_{n-1}(t)), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Равномерная сходимость последовательности функций $y_k(t)$ на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ эквивалентна равномерной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (y_n(t) - y_{n-1}(t)) \tag{2.13}$$

на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$. Применим признак Вейерштрасса для доказательства равномерной сходимости ряда (2.13) на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$. Из оценки (2.12) следует, что

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leqslant AL^{n-1} \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} = c_n, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h], \quad n = 1, 2, \ldots$$

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится по признаку Даламбера. Следовательно, ряд (2.13) сходится равномерно на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$. Это означает, что последовательность функций $y_k(t)$ сходится равномерно на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ к некоторой функции $y(t)$. Так как все функции $y_k(t)$ непрерывны на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$, то функция $y(t)$ также непрерывна на этом отрезке, то есть $y(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$.

Покажем, что $|y(t) - y_0| \leqslant A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Как было доказано, $|y_k(t) - y_0| \leqslant A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Переходя в этом

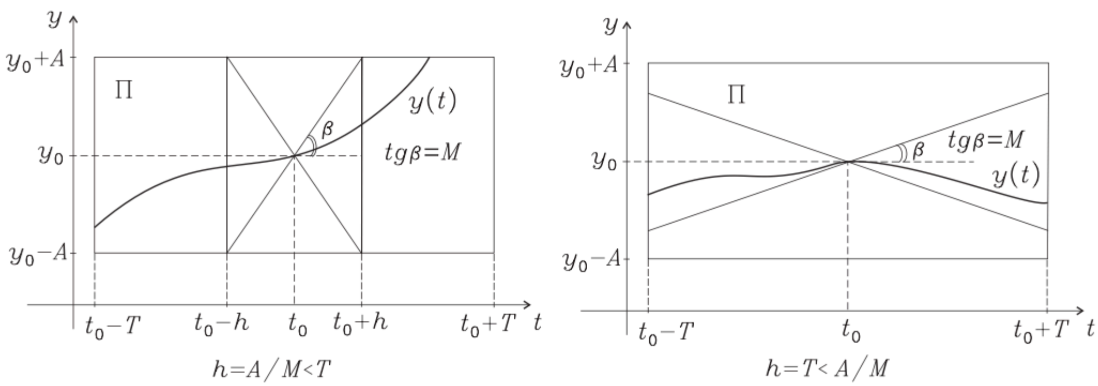


Рис. 2.1. К доказательству теоремы существования решения задачи Коши.

неравенстве к пределу при $k \to \infty$ и произвольном фиксированном $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, получим, что $|y(t) - y_0| \leqslant A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$.

Покажем, что $y(t)$ является решением интегрального уравнения (2.9). В силу равномерной на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ сходимости $y_k(t)$ к функции $y(t)$ для произвольного $\delta > 0$ найдется номер $k_0(\delta)$ такой, что при $k \geqslant k_0(\delta)$ справедливо неравенство $|y_k(t) - y(t)| < \delta$ для всех $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ выбираем $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{Lh}$ и $k_0 = k_0(\delta(\varepsilon))$ так, что при $k \geqslant k_0$ справедливо неравенство

$$|f(\tau, y_k(\tau)) - f(\tau, y(\tau))| \leqslant L|y_k(\tau) - y(\tau)| < \frac{\varepsilon}{h}, \quad \tau \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Тогда для разности интегралов получаем оценки

$$\left| \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_k(\tau))d\tau - \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau \right| < \frac{\varepsilon}{h}|t - t_0| \leqslant \varepsilon, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h],$$

позволяющие перейти в (2.10) к пределу при $k \to \infty$ и произвольном фиксированном $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. В результате получаем, что $y(t)$ является решением интегрального уравнения (2.9).

Таким образом, мы показали, что $y(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$, $|y(t) - y_0| \leqslant A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ и является решением интегрального уравнения (2.9). Следовательно, $y(t)$ является решением задачи с начальным условием на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ и теорема 2.1.2 доказана. $\square$

Вернемся опять к вопросу о том, почему мы не можем доказать теорему существования на всем отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$, а доказываем существование решения только на отрезке $[t_0-h, t_0+h]$, где $h=\min\{T, \frac{A}{M}\}$ (см. рис. 2.1). Это объясняется тем, что мы должны следить за тем, чтобы точка $(t, y(t))$ не выходила за пределы прямоугольника Π, то есть чтобы выполнялось неравенство $|y(t)-y_0| \leqslant A$, $t \in [t_0-h, t_0+h]$. Это необходимо, поскольку только в Π функция $f(t,y)$ ограничена фиксированной постоянной M и удовлетворяет условию Липшица с фиксированной константой L. Попытки увеличить число $h=\min\{T, \frac{A}{M}\}$ за счет увеличения A, вообще говоря, безрезультатны, поскольку при увеличении A в общем случае увеличивается постоянная M.

Приведем пример, показывающий, что без дополнительных предположений относительно функции $f(t,y)$ решение существует только на достаточно малом отрезке.

Пример 2.1.1. *Рассмотрим при $a>0$ задачу Коши*

$$y'(t)=a(y(t)^2+1), \quad y(0)=0.$$

Функция $f(t,y)=a(y^2+1)$ определена при любых действительных t и y. Однако решение этой задачи $y(t)=\operatorname{tg}(at)$ существует только на отрезке $[-h_1, h_1]$, содержащемся в интервале $\left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a}\right)$.

5. ОДУ первого порядка, не разрешенное относительно производной. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения уравнения первого порядка, примеры.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0. \tag{2.14}$$

Всюду в этом параграфе будем считать, что функция $F(t, y, p)$ определена в параллелепипеде D с центром в некоторой точке $(t_0, y_0, y'_0) \in \mathbb{R}^3$:

$$D = \{(t, y, p) : \ |t - t_0| \leqslant a, \ |y - y_0| \leqslant b, \ |p - y'_0| \leqslant c\}, \tag{2.15}$$

где a, b, c – фиксированные положительные числа.

Определение 2.2.1. *Функция $y(t)$ называется решением уравнения (2.14) на отрезке $[t_1, t_2]$, если:*

1. *$y(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_1, t_2]$;*
2. *$(t, y(t), y'(t)) \in D$ для всех $t \in [t_1, t_2]$;*
3. *на отрезке $[t_1, t_2]$ выполнено (2.14).*

Теорема 2.2.1. *Пусть функция $F(t, y, p)$ определена в параллелепипеде D, заданным (2.15), и выполнены следующие условия:*

$$1. \quad F(t_0, y_0, y_0') = 0; \tag{2.25}$$

$$2. \quad F(t, y, p), \quad \frac{\partial F(t, y, p)}{\partial y}, \quad \frac{\partial F(t, y, p)}{\partial p} \text{ непрерывны в } D; \tag{2.26}$$

$$3. \quad \frac{\partial F(t_0, y_0, y_0')}{\partial p} \neq 0. \tag{2.27}$$

Тогда найдется $h > 0$ такое, что на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ существует единственное решение задачи Коши (2.20).

Доказательство. Рассмотрим в окрестности точки (t_0, y_0, y_0') уравнение

$$F(t, y, p) = 0. \tag{2.28}$$

Из условий (2.25)-(2.27) и теоремы о неявной функции следует, что найдется окрестность Ω_0 точки (t_0, y_0), в которой существует единственная непрерывная функция $p = f(t, y)$, имеющая в Ω_0 непрерывную частную производную

$$\frac{\partial f(t,y)}{\partial y} = -\frac{\partial F(t,y,f(t,y))/\partial y}{\partial F(t,y,f(t,y))/\partial p}, \tag{2.29}$$

и являющаяся решением уравнения (2.28). В частности, выполнено равенство

$$y_0' = f(t_0, y_0). \tag{2.30}$$

В окрестности Ω_0 уравнение (2.14) эквивалентно дифференциальному уравнению $y'(t) = f(t, y(t))$, разрешенному относительно производной, а задача Коши (2.20) принимает вид

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0. \tag{2.31}$$

Отметим, что фигурирующее в (2.20) начальное условие на производную $y'(t_0) = y_0'$ автоматически выполнено в силу равенства (2.30).

Рассмотрим задачу Коши (2.31) в прямоугольнике

$$\Pi = \{(t,y): \quad |t - t_0| \leqslant a_0, \quad |y - y_0| \leqslant b_0\},$$

где положительные числа a_0, b_0 настолько малы, чтобы $\Pi \subset \Omega_0$. Как уже установлено выше, функция $f(t, y)$ непрерывна в Ω_0, а значит и в Π. Условие Липшица для этой функции по переменной y на множестве Π с константой

$$L = \max_{(t,y)\in\Pi} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right|$$

вытекает из непрерывности в Π частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,y)$, определенной в (2.29). Таким образом, в Π выполнены все условия теоремы 2.1.2 существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной. Следовательно, найдется $h > 0$ такое, что на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ существует единственное решение задачи Коши (2.31), а значит и задачи Коши (2.20). $\square$

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0'. \tag{2.20}$$

Определение 2.2.2. *Функция $y = \xi(t)$ называется особым решением дифференциального уравнения*

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0$$

на отрезке $[t_1, t_2]$, если $y = \xi(t)$ является решением уравнения на этом отрезке в смысле определения 2.2.1, и через каждую точку соответствующей интегральной кривой

$$\Gamma = \{(t, y) : \quad y = \xi(t), \quad t \in [t_1, t_2]\}$$

проходит другое решение этого уравнения с тем же самым наклоном касательной, но отличающееся от данного решения в сколь угодно малой окрестности точки.

Таким образом, в каждой точке интегральной кривой особого решения нарушается единственность решения задачи Коши

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0', \quad \forall (t_0, y_0) \in \Gamma.$$

Пример 2.2.3. *Уравнение*

$$y' = \sqrt[3]{y^2} \tag{2.32}$$

имеет решение $y_0(t) \equiv 0$ *и семейство решений* $y(t, C) = \dfrac{(t-C)^3}{27}$. *Функция* $y_0(t)$ *является особым решением уравнения (2.32) на любом отрезке* $[t_1, t_2]$, *поскольку для любого* $t_0 \in [t_1, t_2]$ *найдется* $C = t_0$ *такое, что через точку* $(t_0, 0)$ *интегральной кривой решения* $y_0(t)$ *проходит другое решение*

$$y(t, t_0) = \frac{(t-t_0)^3}{27}$$

с тем же самым нулевым углом наклона касательной (см. рис. 1.3). В данном случае $F(t, y, p) = p - \sqrt[3]{y^2}$ *является непрерывной функцией, а производная*

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$$

не существует при $y = 0$, *то есть нарушено одно из условий (2.26).*

Таким образом, особое решение может содержаться среди тех кривых, на которых частная производная $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ не существует.

Пусть теперь выполнены условия (2.26) относительно $F(t, y, p)$. Если существует особое решение $\xi(t)$, то во всех точках его интегральной кривой должны выполняться два равенства

$$F(t, \xi(t), \xi'(t)) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p}(t, \xi(t), \xi'(t)) = 0.$$

Ясно, что тройка $(t, \xi(t), \xi'(t))$ при каждом t является решением системы уравнений

$$\begin{cases} F(t, y, p) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial p}(t, y, p) = 0. \end{cases} \tag{2.33}$$

Часто из системы (2.33) можно исключить переменную p и получить уравнение $\Phi(t, y) = 0$. Решения этого уравнения на плоскости задаются одной или несколькими линиями, которые называются *дискриминантными кривыми.*

Возможны следующие три случая:

1. уравнение $\Phi(t, y) = 0$ задает особое решение;
2. уравнение $\Phi(t, y) = 0$ задает решение уравнения (2.14), которое не является особым;
3. уравнение $\Phi(t, y) = 0$ задает функцию, не являющуюся решением уравнения (2.14).

Пример 2.2.4. *Перепишем уравнение (2.32) из примера 2.2.3 в виде*

$$(y')^3 - y^2 = 0.$$

Из системы (2.33) для дискриминантной кривой

$$\begin{cases} p^3 - y^2 = 0, \\ 3p^2 = 0 \end{cases}$$

находим функцию $y(t) = 0$, которая является особым решением.

6. Нормальные системы ОДУ. Теорема единственности решения задачи Коши для нормальной системы ОДУ n-ого порядка.

В этом разделе мы докажем теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнения n-го порядка на произвольном отрезке.

2.3.1. Постановка задачи Коши для нормальной системы

Пусть функции $f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ определены и непрерывны для

$$t \in [a, b], \quad (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Требуется определить функции $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$, являющиеся решениями нормальной системы дифференциальных уравнений на отрезке $[a, b]$

$$\begin{cases} y_1'(t) & = & f_1(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)), \\ y_2'(t) & = & f_2(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)), \\ & \ldots & \\ y_n'(t) & = & f_n(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)), \end{cases} \tag{2.34}$$

и удовлетворяющие начальным условиям

$$y_1(t_0) = y_{01}, \quad y_2(t_0) = y_{02}, \quad \ldots, \quad y_n(t_0) = y_{0n}, \tag{2.35}$$

где t_0 – некоторая фиксированная точка отрезка $[a,b]$, а $y_{01}, y_{02}, \ldots y_{0n}$ – заданные вещественные числа. Эта задача называется задачей Коши или задачей с начальным условием для нормальной системы дифференциальных уравнений (2.34).

Определение 2.3.1. *Функции $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ называются решением задачи Коши (2.34), (2.35) на отрезке $[a,b]$, если:*

1. *функции $y_i(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$, $i = 1, 2, \ldots, n$;*
2. *$y_i'(t) = f_i(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$, $t \in [a,b]$, $i = 1, 2, \ldots, n$;*
3. *$y_i(t_0) = y_{0i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Определение 2.3.2. *Функция $f(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ удовлетворяет условию Липшица по $y_1, y_2, \ldots, y_n$, если найдется такая положительная константа $L > 0$, что выполнены неравенства*

$$\begin{aligned} |f(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f(t, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, \widetilde{y}_n)| \leqslant \\ \leqslant L\big(|y_1 - \widetilde{y}_1| + |y_2 - \widetilde{y}_2| + \cdots + |y_n - \widetilde{y}_n|\big), \\ \forall t \in [a,b], \quad \forall (y_1, y_2, \ldots, y_n), (\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, \widetilde{y}_n) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{2.36}$$

2.3.2. Теорема единственности решения задачи Коши для нормальной системы

Докажем единственность решения задачи Коши (2.34), (2.35) для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теорема 2.3.1. *Пусть функции $f_k(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, определены и непрерывны при $t \in [a,b]$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют условию Липшица (2.36) с одной и той же константой L.*

Тогда, если функции $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ и $\widetilde{y}_1(t), \widetilde{y}_2(t), \ldots, \widetilde{y}_n(t)$ являются решениями задачи Коши (2.34), (2.35) на отрезке $[a,b]$, то $y_i(t) = \widetilde{y}_i(t)$ для $t \in [a,b]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Так как функции $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ – решения задачи Коши (2.34), (2.35), то

$$y_i'(t) = f_i(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)) \quad t \in [a,b], \quad y_i(t_0) = y_{0i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Интегрируя дифференциальное уравнение от t_0 до t и используя начальное условие (2.35), получим для $i = 1, 2, \ldots, n$

$$y_i(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^{t} f_i(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), \ldots, y_n(\tau))d\tau, \quad t \in [a, b]. \tag{2.37}$$

Компоненты $\widetilde{y}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ другого решения удовлетворяют таким же уравнениям

$$\widetilde{y}_i(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^{t} f_i(\tau, \widetilde{y}_1(\tau), \widetilde{y}_2(\tau), \ldots, \widetilde{y}_n(\tau))d\tau, \quad t \in [a, b]. \tag{2.38}$$

Вычитая уравнения (2.38) из уравнений (2.37) и используя условие Липшица (2.36), получим для $i = 1, 2, \ldots, n$ и $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned}
&|y_i(t) - \widetilde{y}_i(t)| = \\
&= \left| \int_{t_0}^{t} \left(f_i(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), \ldots, y_n(\tau)) - f_i(\tau, \widetilde{y}_1(\tau), \widetilde{y}_2(\tau), \ldots, \widetilde{y}_n(\tau))\right) d\tau \right| \leqslant \\
&\leqslant L \left| \int_{t_0}^{t} \Big(|y_1(\tau) - \widetilde{y}_1(\tau)| + |y_2(\tau) - \widetilde{y}_2(\tau)| + \cdots + |y_n(\tau) - \widetilde{y}_n(\tau)|\Big) d\tau \right|.
\end{aligned}$$

Введем функцию

$$z(t) = |y_1(t) - \widetilde{y}_1(t)| + |y_2(t) - \widetilde{y}_2(t)| + \cdots + |y_n(t) - \widetilde{y}_n(t)|.$$

Тогда полученное неравенство можно переписать так:

$$|y_i(t) - \widetilde{y}_i(t)| \leqslant L \left| \int_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau \right|, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad t \in [a, b].$$

Складывая все эти неравенства, имеем

$$z(t) \leqslant nL \left| \int_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau \right|, \quad t \in [a, b].$$

Из леммы Гронуолла-Беллмана 2.1.2 следует, что $z(t) = 0$, $t \in [a, b]$. Это означает, что

$$y_i(t) = \widetilde{y}_i(t) \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad t \in [a, b].$$

Теорема 2.3.1 доказана. $\square$

7. Теорема существования решения задачи Коши для нормальной системы ОДУ на всем отрезке.

Действительно, положив в (2.39) $t = t_0$, получим, что $\bar{y}_i(t)$ удовлетворяет условиям (2.35). Дифференцируя (2.39) по t, убеждаемся в том, что выполнены уравнения (2.34).

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно доказать, что существуют функции $\bar{y}_i(t)$ непрерывные на отрезке $[a, b]$, удовлетворяющие системе интегральных уравнений (2.39).

Докажем существование таких функций $\bar{y}_i(t)$, используя метод последовательных приближений. Рассмотрим последовательности функций $y_1^k(t), y_2^k(t), \ldots, y_n^k(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ таких, что

$$y_i^{k+1}(t) = y_{0i} + \int\limits_{t_0}^{t} f_i(\tau, y_1^k(\tau), y_2^k(\tau), \ldots, y_n^k(\tau))d\tau, \quad y_i^0(t) = y_{0i}, \qquad (2.40)$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, $t \in [a, b]$. Докажем, что все $y_i^k(t)$ определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$.

Для $y_i^0(t)$ это верно. Предположим, что это верно для $y_i^m(t)$ и покажем, что это верно для $y_i^{m+1}(t)$. Так как все функции $f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ непрерывны при $t \in [a, b]$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, то из (2.40) следует, что $y_i^{m+1}(t)$ определены и непрерывны на $[a, b]$.

Обозначим через B следующую постоянную

$$B = \max_{i=1,2,\ldots,n} \max_{t\in[a,b]} \left| \int\limits_{t_0}^{t} f_i(\tau, y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n})d\tau \right|.$$

Покажем, что для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и $k = 0, 1, \ldots$ на отрезке $[a, b]$ справедливы оценки

$$|y_i^{k+1}(t) - y_i^k(t)| \leqslant B(nL)^k \frac{|t - t_0|^k}{k!}. \qquad (2.41)$$

При $k = 0$ это верно, так как

$$|y_i^1(t) - y_i^0(t)| = \left| \int\limits_{t_0}^{t} f_i(\tau, y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n})d\tau \right| \leqslant B.$$

Пусть неравенство (2.41) справедливо для $k = m - 1$. Покажем, что оно выполнено для $k = m$. Из (2.40) имеем

$$|y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_{t_0}^{t} |f_i(\tau, y_1^m(\tau), y_2^m(\tau), \ldots, y_n^m(\tau)) - \right.$$

$$\left. - f_i(\tau, y_1^{m-1}(\tau), y_2^{m-1}(\tau), \ldots, y_n^{m-1}(\tau))| d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_{t_0}^{t} L\Big(|y_1^m(\tau) - y_1^{m-1}(\tau)| + |y_2^m(\tau) - y_2^{m-1}(\tau)| + \ldots \right.$$

$$\left. \cdots + |y_n^m(\tau) - y_n^{m-1}(\tau)|\Big) d\tau \right|.$$

Используя предположение индукции, получим

$$|y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)| \leqslant \left| \int\limits_{t_0}^{t} B(nL)^m \frac{|\tau - t_0|^{m-1}}{(m-1)!} d\tau \right| \leqslant B(nL)^m \frac{|t - t_0|^m}{m!}.$$

Следовательно, неравенство (2.41) доказано по индукции.

Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ функциональные ряды

$$y_i^0(t) + \sum_{m=0}^{\infty} (y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Из (2.41)следует, что на отрезке $[a, b]$ справедливы оценки

$$|y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)| \leqslant B(nL)^m \frac{(b-a)^m}{m!}, \quad m = 0, 1, \ldots.$$

Учитывая эти оценки и используя признак Вейерштрасса, получим, что функциональные ряды сходятся равномерно на отрезке $[a, b]$. Следовательно, последовательности непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций

$$y_i^k(t) = y_i^0(t) + \sum_{m=0}^{k-1} (y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

сходятся равномерно на отрезке $[a, b]$ к непрерывным функциям $\bar{y}_i(t)$.

Переходя к пределу при $k \to +\infty$ в формулах (2.40), получим, что функции $\bar{y}_i(t)$ являются решением системы интегральных уравнений (2.39), а значит и задачи (2.34), (2.35). Теорема 2.3.2 доказана. □

Замечание 2.3.1. *Для выполнения условия Липшица (2.36) достаточно, чтобы все функции $f_k(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ имели равномерно ограниченные частные производные*

$$\left|\frac{\partial f_k(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial y_j}\right| \leqslant D, \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$k, j = 1, 2, \ldots, n$, D *– постоянная. Действительно, в этом случае*

$$\begin{gathered}
|f_k(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f_k(t, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, \widetilde{y}_n)| \leqslant \\
\leqslant |f_k(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f_k(t, \widetilde{y}_1, y_2, \ldots, y_n)| + \\
+ |f_k(t, \widetilde{y}_1, y_2, \ldots, y_n) - f_k(t, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, y_n)| + \ldots \\
\cdots + |f_k(t, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, y_n) - f_k(t, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, \widetilde{y}_n)|.
\end{gathered}$$

Применяя формулу Лагранжа по каждой переменной, получим

$$\begin{aligned}
&|f_k(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f_k(t, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, \widetilde{y}_n)| \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant D\Big(|y_1 - \widetilde{y}_1| + |y_2 - \widetilde{y}_2| + \cdots + |y_n - \widetilde{y}_n|\Big).
\end{aligned}$$

Следовательно, все функции $f_k(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ удовлетворяют условию Липшица (2.36) с постоянной $L = D$.

Используя это замечание, легко привести пример системы, удовлетворяющей условиям теорем 2.3.1 и 2.3.2.

Пример 2.3.1. *Для системы*

$$\begin{cases}
y_1'(t) = t \sin(y_1(t) + y_2(t)) + \dfrac{(y_1(t))^3}{1 + (y_1(t))^2}, \\
y_2'(t) = t^2 y_2(t) + \cos(y_1(t) + y_2(t))
\end{cases}$$

выполнены условия теорем 2.3.1 и 2.3.2, и решение задачи Коши для этой системы существует и единственно на любом отрезке $[a, b]$.

8. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для ОДУ n-ого порядка на всем отрезке.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной,

$$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), \quad t \in [a, b], \tag{2.42}$$

где функция $F(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ задана, а $y(t)$ – неизвестная искомая функция.

Рассмотрим для функции $y(t)$ начальные условия

$$y(t_0) = y_{00},\ y'(t_0) = y_{01},\ y^{(2)}(t_0) = y_{02},\ \dots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n-1}, \tag{2.43}$$

где t_0 некоторое фиксированное число на отрезке $[a, b]$, а $y_{00}, \dots, y_{0n-1}$ – заданные числа.

Задачей Коши или задачей с начальными условиями для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной, называется задача отыскания функции $y(t)$, удовлетворяющей уравнению (2.42) и начальным условиям (2.43).

Определение 2.3.3. *Функция $y(t)$ называется решением задачи Коши (2.42), (2.43) на отрезке $[a, b]$, если $y(t)$ является n раз непрерывно дифференцируемой на $[a, b]$ функцией, $y(t)$ удовлетворяет уравнению (2.42) и начальным условиям (2.43).*

Докажем теорему существования и единственности решения задачи Коши (2.42), (2.43).

Теорема 2.3.3. *Пусть функция $F(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ определена и непрерывна при $t \in [a, b]$, $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию Липшица с константой $L_1 > 0$, то есть*

$$|F(t, y_1, y_2, \dots, y_n) - F(t, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \dots, \widetilde{y}_n)| \leqslant L_1 \sum_{i=1}^{n} |y_i - \widetilde{y}_i|, \tag{2.44}$$
$$\forall t \in [a, b], \quad \forall (y_1, y_2, \dots, y_n),\ (\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \dots, \widetilde{y}_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда существует единственная функция $y(t)$, являющаяся решением задачи Коши (2.42), (2.43) на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Докажем вначале единственность решения. Пусть функция $y(t)$ является решением задачи Коши (2.42), (2.43) на отрезке

$[a,b]$. Введем функции

$$y_1(t) = y(t), \quad y_2(t) = y'(t), \quad y_3(t) = y''(t), \quad \ldots \quad y_n(t) = y^{(n-1)}(t).$$

Так как функция $y(t)$ является решением задачи Коши (2.42), (2.43) на отрезке $[a,b]$, то функции $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ являются решением задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1'(t) & = & y_2(t), \\ y_2'(t) & = & y_3(t), \\ & \ldots & \\ y_{n-1}'(t) & = & y_n(t), \\ y_n'(t) & = & F(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)) \end{array} \right. \tag{2.45}$$

с начальными условиями

$$y_i(t_0) = y_{0i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.46}$$

Система (2.45) является частным случаем нормальной системы (2.34) с функциями

$$\begin{array}{rcl} f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) & = & y_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) & = & F(t, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{array}$$

Эти функции определены и непрерывны при $t \in [a,b]$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют условию Липшица (2.36) с одной и той же константой

$$L = \max\{1, L_1\}.$$

Поэтому задача (2.45), (2.46) удовлетворяет условиям теоремы 2.3.1 о единственности решения задачи Коши для нормальной системы. Следовательно, решение задачи Коши (2.45), (2.46) единственно, а значит и решение задачи Коши (2.42), (2.43) также единственно.

Докажем существование решения решения Коши (2.42), (2.43). Рассмотрим задачу Коши (2.45), (2.46). Для нее выполнены условия теоремы 2.3.2 существования решения на отрезке $[a, b]$. То есть существуют непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$ функции $y_i(t)$, удовлетворяющие (2.45), (2.46). Обозначив $y_1(t)$ через $y(t)$, получим, что $y(t)$ является n раз непрерывно дифференцируемой на $[a, b]$ функцией, $y^{(i-1)}(t) = y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и $y(t)$ удовлетворяет (2.42), (2.43). Следовательно $y(t)$ является решением Коши (2.42), (2.43). Теорема 2.3.3 доказана. $\square$

9. Теоремы существования и единственности решения линейной системы ОДУ и решения линейного ОДУ n-ого порядка на всем отрезке.

порядка на всем отрезке.

Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1'(t) & = & a_{11}(t)y_1(t)+a_{12}(t)y_2(t)+\dots+a_{1n}(t)y_n(t)+\widehat{f}_1(t), \\ y_2'(t) & = & a_{21}(t)y_1(t)+a_{22}(t)y_2(t)+\dots+a_{2n}(t)y_n(t)+\widehat{f}_2(t), \\ & \dots & \\ y_n'(t) & = & a_{n1}(t)y_1(t)+a_{n2}(t)y_2(t)+\dots+a_{nn}(t)y_n(t)+\widehat{f}_n(t), \end{array}\right. \tag{2.47}$$

где $a_{ij}(t)$, $\widehat{f}_i(t)$, $i,j=1,2,\dots,n$ – заданные непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции.

Пусть задано начальное условие

$$y_i(t_0)=y_{0i}, \quad i=1,2,\dots,n. \tag{2.48}$$

Докажем теорему существования и единственности решения задачи Коши (2.47), (2.48).

Теорема 2.3.4. *Пусть функции $a_{ij}(t)$, $\widehat{f}_i(t)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, $i,j=1,2,\dots,n$. Тогда существует единственный набор функций $y_1(t),y_2(t),\dots,y_n(t)$, являющийся решением задачи Коши (2.47), (2.48) на отрезке $[a,b]$.*

Доказательство. Система (2.47) является частным случаем системы (2.34) с функциями

$$f_i(t,y_1,y_2,\dots,y_n)=a_{i1}(t)y_1+a_{i2}(t)y_2+\dots+a_{in}(t)y_n+\widehat{f}_i(t),\ \ i=1,2,\dots,n.$$

Эти функции $f_i(t,y_1,y_2,\dots,y_n)$ определены и непрерывны при $t\in[a,b]$, $(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ и удовлетворяют условию Липшица (2.36) с постоянной

$$L=\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\ \max_{t\in[a,b]}|a_{ij}(t)|.$$

Следовательно, для задачи Коши (2.47), (2.48) выполнены условия теорем 2.3.1 и 2.3.2, и она имеет единственное решение на отрезке $[a,b]$. Теорема 2.3.4 доказана. □

2.3.6. Задача Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка

Докажем теорему существования и единственности решения задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = f(t), \quad (2.49)$$

где $a_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, $f(t)$ – заданные непрерывные на $[a, b]$ функции, причем $a_0(t) \neq 0$ на $[a, b]$.

Рассмотрим для функции $y(t)$ начальные условия в точке $t_0 \in [a, b]$

$$y^{(i)}(t_0) = y_{0i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1. \quad (2.50)$$

Теорема 2.3.5. *Пусть функции $a_i(t)$, $f(t)$ непрерывны на $[a, b]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $a_0(t) \neq 0$ на $[a, b]$. Тогда существует единственная функция $y(t)$, являющаяся решением задачи Коши (2.49), (2.50) на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. Уравнение (2.49) является частным случаем уравнения (2.42) с функцией

$$F(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{f(t)}{a_0(t)} - \frac{a_n(t)}{a_0(t)} \cdot y_1 - \frac{a_{n-1}(t)}{a_0(t)} \cdot y_2 - \cdots - \frac{a_1(t)}{a_0(t)} \cdot y_n.$$

Эта функция $F(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ определена и непрерывна при $t \in [a, b]$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию Липшица (2.44) с постоянной

$$L_1 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \max_{t \in [a,b]} \left| \frac{a_i(t)}{a_0(t)} \right|.$$

Следовательно, для задачи Коши (2.49), (2.50) выполнены условия теоремы 2.3.3 и ее решение существует и единственно на отрезке $[a, b]$. Теорема 2.3.5 доказана.

10. Три теоремы об общих свойствах линейного ОДУ n-ого порядка.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = f(t) \quad (3.15)$$

с непрерывными на отрезке $[a, b]$ действительными коэффициентами $a_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $a_0(t) \neq 0$, $t \in [a, b]$ и непрерывной на отрезке $[a, b]$ комплекснозначной функцией $f(t)$.

Введем линейный дифференциальный оператор n-го порядка.

Определение 3.2.1. *Линейным дифференциальным оператором n-го порядка называется оператор*

$$\mathcal{L}y = a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t). \quad (3.16)$$

Оператор $\mathcal{L}$ определен для всех n раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций $y(t)$, причем $\mathcal{L}y(t) \in C[a, b]$. Используя это определение, уравнение (3.15) можно записать в виде

$$\mathcal{L}y = f(t), \quad t \in [a, b].$$

Если функция $f(t)$ равна нулю на отрезке $[a, b]$, то уравнение (3.15) называется *однородным*, а если функция $f(t)$ не равна нулю на отрезке $[a, b]$, то уравнение (3.15) называется *неоднородным*.

Теорема 3.2.1. *Если функции $y_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, m$ являются решениями уравнений $\mathcal{L}y_k = f_k(t)$, то функция $y(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k y_k(t)$, где c_k – комплексные постоянные, является решением уравнения $\mathcal{L}y = f(t)$, где $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k f_k(t)$.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы следует из линейности оператора $\mathcal{L}$, которая является следствием линейности оператора дифференцирования:

$$\mathcal{L}y = \mathcal{L}\sum_{k=1}^{m} c_k y_k(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k \mathcal{L}y_k = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k(t) = f(t), \quad t \in [a, b].$$

$\square$

Следствие 3.2.1. *Линейная комбинация решений однородного уравнения является решением однородного уравнения. Разность двух решений неоднородного уравнения с одинаковой правой частью есть решение однородного уравнения.*

Теорема 3.2.2. *Решение задачи Коши*

$$\mathcal{L}y = f(t), \quad y(t_0) = y_{00}, \quad y'(t_0) = y_{01}, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n-1}$$

представимо в виде суммы $y(t) = v(t) + w(t)$, где функция $v(t)$ является решением задачи Коши для неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями

$$\mathcal{L}v = f(t), \quad v(t_0) = 0, \quad v'(t_0) = 0, \quad \ldots, \quad v^{(n-1)}(t_0) = 0,$$

а функция $w(t)$ является решением задачи Коши для однородного уравнения с ненулевыми начальными условиями

$$\mathcal{L}w = 0, \quad w(t_0) = y_{00}, \quad w'(t_0) = y_{01}, \quad \ldots, \quad w^{(n-1)}(t_0) = y_{0n-1}.$$

Доказательство. Сумма $y(t) = v(t) + w(t)$ удовлетворяет неоднородному уравнению в силу теоремы 3.2.1. Для начальных условий имеем равенства

$$y^{(k)}(t_0) = v^{(k)}(t_0) + w^{(k)}(t_0) = 0 + y_{0k} = y_{0k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

□

Теорема 3.2.3. *Решение задачи Коши для однородного уравнения*

$$\mathcal{L}y = 0, \quad y(t_0) = y_{00}, \quad y'(t_0) = y_{01}, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n-1}$$

представимо в виде суммы

$$y(t) = \sum_{m=0}^{n-1} y_m(t) y_{0m},$$

где функции $y_m(t)$ являются решениями задач Коши:

$$\mathcal{L}y_m = 0, \quad y_m^{(m)}(t_0) = 1, \quad y_m^{(k)}(t_0) = 0, \quad \forall k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \backslash \{m\}.$$

Доказательство. Функция $y(t)$ является решением однородного уравнения как линейная комбинация решений $y_m(t)$ однородного уравнения с постоянными коэффициентами в силу теоремы 3.2.1. Осталось убедиться в выполнении начальных условий:

$$y^{(k)}(t_0) = \sum_{m=0}^{n-1} y_m^{(k)}(t_0) y_0^{(m)} = y_k^{(k)}(t_0) y_{0k} = y_{0k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

$\square$

11. Линейная зависимость и независимость скалярных функций. Определитель Вронского. Теорема о необходимом условии линейной зависимости скалярных функций. Примеры.

В этом параграфе рассматриваются произвольные скалярные функции

$$\varphi_1(t), \quad \varphi_2(t), \quad \dots, \quad \varphi_m(t),$$

определенные на отрезке $[a, b]$ и принимающие комплексные значения. Никакая связь с решениями дифференциальных уравнений пока не предполагаются.

Определение 3.3.1. *Скалярные функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$ называются линейно зависимыми на отрезке $[a, b]$, если найдутся такие комплексные константы $c_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, m$, $\sum\limits_{k=1}^{m} |c_k| > 0$, что справедливо равенство*

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_m\varphi_m(t) = 0, \quad \forall t \in [a, b]. \tag{3.17}$$

Если же равенство (3.17) выполнено только для тривиального набора констант $c_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, то скалярные функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\dots$, $\varphi_m(t)$ называются линейно независимыми на отрезке $[a, b]$.

Определение 3.3.2. *Определителем Вронского системы функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\dots$, $\varphi_m(t)$, состоящей из $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций, называется зависящий от переменной $t \in [a, b]$ определитель*

$$W[\varphi_1, \dots, \varphi_m](t) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_m(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_1'(t) & \dots & \varphi_m'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(m-1)}(t) & \varphi_2^{(m-1)}(t) & \dots & \varphi_m^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Необходимое условие линейной зависимости скалярных функций устанавливает следующая теорема.

Теорема 3.3.1. *Если система $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ скалярных функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$ является линейно зависимой на отрезке $[a,b]$, то определитель Вронского этой системы тождественно равен нулю на этом отрезке:*

$$W[\varphi_1, \ldots, \varphi_m](t) = 0, \quad \forall t \in [a,b].$$

Доказательство. Так как функции $\varphi_k(t)$ линейно зависимы на $[a,b]$, то существует нетривиальный набор констант $c_1, c_2, \ldots, c_n$, для которого на отрезке $[a,b]$ справедливо равенство (3.17). В этом равенстве допустимо почленное дифференцирование до порядка $m-1$ включительно:

$$c_1\varphi_1^{(k)}(t) + \cdots + c_m\varphi_m^{(k)}(t) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \quad t \in [a,b]. \quad (3.18)$$

Из (3.18) следует, что вектор-столбцы определителя Вронского линейно зависимы для всех $t \in [a,b]$. Следовательно, этот определитель равен нулю для всех $t \in [a,b]$. □

Пример 3.3.2. *Для $m = 2$ рассмотрим на отрезке $[-1,1]$ две функции, имеющие нулевой определитель Вронского:*

$$\varphi_1(t) = t^3, \quad \varphi_2(t) = t^2|t|, \quad W[\varphi_1, \varphi_2](t) = \det\begin{pmatrix} t^3 & t^2|t| \\ 3t^2 & 3t|t| \end{pmatrix} \equiv 0.$$

Однако, как показано выше в примере 3.3.1, эти функции являются линейно независимыми на отрезке $[-1,1]$.

Пример 3.3.1. *Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ функции*

$$\varphi_1(t) = t^3, \quad \varphi_2(t) = t^2|t|.$$

Если $0 < a < b$, то на рассматриваемом отрезке $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ и функции линейно зависимы на $[a,b]$.

Если же $a < 0 < b$, то, положив $t = d = \min\{|a|, b\}$ и $t = -d$ в равенстве $c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) = 0$, получим систему $c_1d^3 + c_2d^3 = 0$, $c_1d^3 - c_2d^3 = 0$, из которой следует, что $c_1 = c_2 = 0$, а значит $\varphi_1(t) = t^3$ и $\varphi_2(t) = t^2|t|$ линейно независимы на $[a,b]$.

12. Линейная зависимость и независимость решений линейного однородного ОДУ n-ого порядка. Теорема об альтернативе для определителя Вронского.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение порядка n с непрерывными на отрезке $[a, b]$ действительными коэффициентами $a_j(t)$, $j = 0, \ldots, n$, $a_0(t) \neq 0$ на $[a, b]$:

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = 0. \quad (3.19)$$

Рассмотрим систему скалярных функций $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$, являющихся решением линейного однородного уравнения (3.19) порядка n. Подчеркнем, что количество функций в рассматриваемой системе совпадает с порядком уравнения. Исследуем вопрос о связи свойства линейной зависимости решений линейного однородного дифференциального уравнения и значения определителя Вронского. В отличие от случая произвольной системы функции для системы решений однородного

дифференциального уравнения (3.19) поведение определителя Вронского является критерием линейной зависимости или независимости системы решений. Справедлива следующая теорема, которую можно назвать теоремой об альтернативе для определителя Вронского.

Теорема 3.3.2. *Для решений $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ линейного однородного уравнения (3.19) на отрезке $[a, b]$ справедлива следующая альтернатива:*

- ◁ *либо $W[y_1, \ldots, y_n](t) \equiv 0$ на $[a, b]$ и функции $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ линейно зависимы на этом отрезке;*
- ◁ *либо $W[y_1, \ldots, y_n](t) \neq 0$ $\forall t \in [a, b]$ и функции $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ линейно независимы на $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть в какой-то точке t_0 определитель Вронского, составленный из функций $y_k(t)$, равен нулю, то есть $W[y_1, \ldots, y_n](t_0) = 0$. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $c_1, c_2, \ldots, c_n$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) + \cdots + c_n y_n(t_0) & = & 0, \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) + \cdots + c_n y_n'(t_0) & = & 0, \\ & \ldots & \\ c_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(t_0) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) & = & 0. \end{array} \right. \tag{3.20}$$

Так как определитель этой системы равен определителю Вронского и равен нулю ($W[y_1, \ldots, y_n](t_0) = 0$), то эта система имеет нетривиальное решение $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \ldots, \widetilde{c}_n$, $\sum\limits_{k=1}^{n} |\widetilde{c}_k| > 0$.

Рассмотрим функцию

$$\widetilde{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{c}_k y_k(t).$$

Из теоремы 3.2.1 следует, что эта функция является решением однородного дифференциального уравнения (3.19), а из (3.20) следует, что она удовлетворяет начальным условиям

$$\widetilde{y}^{(m)}(t_0) = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Это означает, что функция $\widetilde{y}(t)$ является решением однородного дифференциального уравнения (3.19) и удовлетворяет нулевым начальным условиям в точке t_0. По теореме единственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения эта функция равна нулю на отрезке $[a, b]$. Следовательно,

$$\widetilde{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{c}_k y_k(t) = 0, \quad t \in [a, b],$$

и функции $y_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ линейно зависимы. Тогда из теоремы 3.3.1 следует, что определитель Вронского, составленный из этих функций, равен нулю на отрезке $[a, b]$.

Пусть существует точка $\widehat{t} \in [a, b]$ такая, что $W[y_1, \ldots, y_n](\widehat{t}\,) \neq 0$. Тогда из предыдущего следует, что определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке отрезка $[a, b]$, и функции $y_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ линейно независимы на этом отрезке. $\square$

13. Фундаментальная система решений (ФСР) линейного однородного ОДУ n-ого порядка. Теорема о существовании ФСР. Теорема об общем решении линейного однородного ОДУ n-ого порядка.

Определение 3.4.1. *Фундаментальной системой решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка (3.19) на отрезке $[a, b]$ называется система из n линейно независимых на данном отрезке решений этого уравнения.*

Теорема 3.4.1. *У любого линейного однородного уравнения (3.19) существует фундаментальная система решений на $[a, b]$.*

Доказательство. Рассмотрим постоянную матрицу B с элементами b_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ такую, что $\det B \neq 0$. Обозначим через $y_j(t)$ решения задачи Коши для уравнения (3.19) с начальными условиями

$$y_j(t_0) = b_{1j},\ y_j'(t_0) = b_{2j},\ \ldots,\ y_j^{(n-1)}(t_0) = b_{nj}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.21}$$

По теореме 2.3.5 существования и единственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка функции $y_j(t)$ существуют и определены однозначно. Составленный из них определитель Вронского $W[y_1, \ldots, y_n](t)$, в силу условий (3.21), таков, что $W[y_1, \ldots, y_n](t_0) = \det B \neq 0$. Следовательно, по теореме 3.3.2 он не равен нулю ни в одной точке отрезка $[a, b]$, и функции $y_j(t)$ линейно независимы на отрезке $[a, b]$. Значит, они образуют фундаментальную систему решений уравнения (3.19) и теорема доказана. $\square$

Теорема 3.4.2. *Пусть $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ – фундаментальная система решений линейного однородного уравнения (3.19) на отрезке $[a,b]$. Тогда общее решение этого уравнения на рассматриваемом отрезке имеет вид*

$$y_{OO}(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t), \quad \forall c_j \in \mathbb{C}. \tag{3.22}$$

Доказательство. Так как линейная комбинация решений однородного уравнения (3.19) является решением этого уравнения, то при любых значениях постоянных c_k функция $y_{OO}(t)$, определяемая формулой (3.22), является решением линейного однородного дифференциального уравнения (3.19).

Покажем теперь, что любое решение уравнения (3.19) может быть получено из (3.22) в результате выбора значений постоянных c_k. Пусть $\widetilde{y}(t)$ – некоторое решение уравнения (3.19). Рассмотрим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных c_k

$$\begin{array}{rcl} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) + \dots + c_n y_n(t_0) & = & \widetilde{y}(t_0), \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) + \dots + c_n y_n'(t_0) & = & \widetilde{y}'(t_0), \\ & \dots & \\ c_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(t_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) & = & \widetilde{y}^{(n-1)}(t_0), \end{array} \tag{3.23}$$

где t_0 – некоторая точка отрезка $[a,b]$. Определитель этой системы равен определителю Вронского в точке t_0 и не равен нулю, так как решения $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ линейно независимы. Следовательно, система (3.23) имеет единственное решение $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \dots, \widetilde{c}_n$.

Рассмотрим функцию

$$\widehat{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{c}_k y_k(t).$$

Эта функция является решением уравнения (3.19). Так как постоянные $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \ldots, \widetilde{c}_n$ представляют собой решение системы (3.23), то функция $\widehat{y}(t)$ такова, что

$$\widehat{y}^{(k)}(t_0) = \widetilde{y}^{(k)}(t_0), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Следовательно, функции $\widehat{y}(t)$ и $\widetilde{y}(t)$ являются решениями уравнения (3.19) и удовлетворяют одним и тем же начальным условиям в точке t_0. По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши эти функции должны совпадать:

$$\widetilde{y}(t) = \widehat{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{c}_k y_k(t).$$

Теорема 3.4.2 доказана. $\square$

14. Теорема об общем решении линейного неоднородного ОДУ n-ого порядка. Метод вариации постоянных.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение с непрерывными на отрезке $[a, b]$ действительными коэффициентами

$$a_j(t), \quad j = 0, \ldots, n, \quad a_0(t) \neq 0, \quad t \in [a, b]$$

и непрерывной на $[a, b]$ правой частью $f(t)$:

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = f(t). \quad (3.24)$$

Перейдем к описанию общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка (3.24). Определение общего решения этого уравнения аналогично определению общего решения однородного уравнения.

Определение 3.4.3. *Общим решением линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка (3.24) называется зависящее от n произвольных постоянных решение этого уравнения такое, что любое другое решение уравнения (3.24) может быть получено из него в результате выбора некоторых значений этих постоянных.*

Теорема 3.4.3. *Пусть* $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ *– фундаментальная система решений линейного однородного уравнения (3.19) на отрезке* $[a,b]$, $y_H(t)$ *– некоторое (частное) решение неоднородного уравнения (3.24). Тогда общее решение линейного неоднородного уравнения (3.24) на рассматриваемом отрезке имеет вид*

$$y_{OH}(t) = y_H(t) + y_{OO}(t) = \\ = y_H(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t), \quad (3.25)$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *– произвольные комплексные постоянные.*

Доказательство. Для любого набора констант $c_j \in \mathbb{C}$ формула (3.25) определяет решение линейного неоднородного уравнения (3.24) в силу линейности уравнения. Согласно определению общего решения осталось показать, что выбором констант в формуле (3.25) можно получить любое наперед заданное решение (3.24), то есть для любого решения $\widetilde{y}(t)$ неоднородного уравнения (3.24) найдутся константы $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \ldots, \widetilde{c}_n$ такие, что на отрезке $[a,b]$ будет выполнено равенство

$$\widetilde{y}(t) = y_H(t) + \widetilde{c}_1 y_1(t) + \widetilde{c}_2 y_2(t) + \cdots + \widetilde{c}_n y_n(t). \quad (3.26)$$

Пусть $\widetilde{y}(t)$ – решение неоднородного уравнения (3.24). Разность $y(t) = \widetilde{y}(t) - y_H(t)$ двух решений линейного неоднородного уравнения (3.24) является решением однородного уравнения (3.19). По теореме 3.4.2 об общем решении линейного однородного уравнения найдутся комплексные константы $\widetilde{c}_j$ такие, что на рассматриваемом отрезке выполнено равенство $y(t) = \widetilde{c}_1 y_1(t) + \widetilde{c}_2 y_2(t) + \cdots + \widetilde{c}_n y_n(t)$, а вместе с ним и искомое равенство (3.26). $\square$

Из теоремы 3.4.3 следует, что для построения общего решения неоднородного дифференциального уравнения (3.24) достаточно знать фундаментальную систему решений однородного уравнения(3.19) и какое-

нибудь решение неоднородного уравнения (3.24). Рассмотрим метод построения решения $y_H(t)$ неоднородного уравнения (3.24) в случае, когда известна фундаментальная система решений однородного уравнения (3.19). В этом методе частное решение ищется в виде, повторяющем структуру (3.22) общего решения однородного уравнения, в котором константы $c_1, c_2, \dots, c_n$ заменены на пока произвольные непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a,b]$ функции $c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)$, а именно:

$$y_H(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) + \dots + c_n(t)y_n(t). \tag{3.27}$$

Пусть производные $c'_k(t)$ функций $c_k(t)$ из представления (3.27) определяются для каждого $t \in [a,b]$ из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{array}{rcc} c'_1(t)y_1(t) + c'_2(t)y_2(t) + \dots + c'_n(t)y_n(t) & = & 0, \\ c'_1(t)y_1^{(1)}(t) + c'_2(t)y_2^{(1)}(t) + \dots + c'_n(t)y_n^{(1)}(t) & = & 0, \\ & \dots & \\ c'_1(t)y_1^{(n-2)}(t) + c'_2(t)y_2^{(n-2)}(t) + \dots + c'_n(t)y_n^{(n-2)}(t) & = & 0, \\ c'_1(t)y_1^{(n-1)}(t) + c'_2(t)y_2^{(n-1)}(t) + \dots + c'_n(t)y_n^{(n-1)}(t) & = & \dfrac{f(t)}{a_0(t)}. \end{array}$$

Так как функции $y_k(t)$ образуют фундаментальную систему решений, то определитель системы для неизвестных $c'_k(t)$ не равен нулю ни в одной точке, и система имеет единственное решение

$$c'_k(t) = g_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Интегрируя, найдем функции $c_k(t) = \int\limits_{t_0}^{t} g_k(\tau)d\tau$.

Выражения для производных частного решения из (3.27) принимают вид

$$
\begin{aligned}
y'_H(t) &= c_1(t)y'_1(t) + c_2(t)y'_2(t) + c_n(t)y'_n(t),\\
y''_H(t) &= c_1(t)y''_1(t) + c_2(t)y''_2(t) + c_n(t)y''_n(t),\\
&\dots\\
y_H^{(n-1)}(t) &= c_1(t)y_1^{(n-1)}(t) + c_2(t)y_2^{(n-1)}(t) + c_n(t)y_n^{(n-1)}(t),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_H^{(n)}(t) = c_1(t)y_1^{(n)}(t) + c_2(t)y_2^{(n)}(t) + c_n(t)y_n^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n} c'_k(t)y_k^{(n-1)}(t) = \\
= c_1(t)y_1^{(n)}(t) + c_2(t)y_2^{(n)}(t) + c_n(t)y_n^{(n)}(t) + \frac{f(t)}{a_0(t)}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, в методе вариации постоянных вычисление производных искомого частного решения (3.27) до порядка $(n-1)$ включительно происходит так, как будто бы функции $c_j(t)$ не зависят от t и являются константами.

Подставив функцию $y_H(t)$ в левую часть уравнения (3.24), имеем

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}y_H(t) = a_0(t)\cdot\frac{f(t)}{a_0(t)} + a_0(t)\sum_{k=1}^{n} c_k(t)y_k^{(n)}(t) + a_1(t)\sum_{k=1}^{n} c_k(t)y_k^{(n-1)}(t) + \dots \\
\dots + a_{n-1}(t)\sum_{k=1}^{n} c_k(t)y'_k(t) + a_n(t)\sum_{k=1}^{n} c_k(t)y_k(t).
\end{aligned}
$$

Произведя перегруппировку слагаемых и приняв во внимание определение (3.16) оператора $\mathcal{L}$, получим

$$
\mathcal{L}y_H(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\mathcal{L}y_k(t) = f(t) + 0 = f(t), \quad t \in [a, b],
$$

поскольку функции $y_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$ являются решениями однородного уравнения (3.19), $\mathcal{L}y_k(t) = 0$. Итак, мы убедились, что построенная функция

$$
y_H(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) + \dots + c_n(t)y_n(t) = \sum_{k=1}^{n} y_k(t)\int_{t_0}^{t} g_k(\tau)d\tau
$$

является решением неоднородного уравнения (3.24).

15. Леммы и теорема о построении ФСР линейного ОДУ n-ого порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим линейное однородное уравнение n-го порядка с вещественными постоянными коэффициентами $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \dots, n$, $a_0 \neq 0$:

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = 0. \tag{3.28}$$

Это уравнение можно записать в операторном виде $\mathcal{L}y = 0$, где дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ с постоянными коэффициентами

$$\mathcal{L}y = a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t).$$

Сопоставим дифференциальному оператору $\mathcal{L}$ многочлен

$$M(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n. \tag{3.29}$$

Многочлен $M(\lambda)$ называется *характеристическим многочленом*, а уравнение

$$M(\lambda) = 0 \tag{3.30}$$

называется *характеристическим уравнением.*

Очевидно, что функция $\exp\{\lambda_0 t\}$ является решением дифференциального уравнения (3.28) тогда и только тогда, когда λ_0 является корнем характеристического уравнения (3.30). Обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ попарно различные корни характеристического многочлена, $M(\lambda_j) = 0$, а через $k_1, \dots, k_\ell$ обозначим кратности этих корней, $k_1 + \dots + k_\ell = n$. Таким образом, справедливо равенство

$$M(\lambda) = a_0 (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_\ell)^{k_\ell}. \tag{3.31}$$

Лемма 3.4.1. *Для любой n раз непрерывно дифференцируемой функции $g(t)$ и произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$ справедливо равенство*

$$\mathcal{L}\Big(\exp\{\lambda t\}g(t)\Big) = \exp\{\lambda t\} \sum_{m=0}^{n} \frac{M^{(m)}(\lambda) g^{(m)}(t)}{m!}.$$

Доказательство. По формуле Лейбница

$$\frac{d^p}{dt^p}\Big(\exp\{\lambda t\}g(t)\Big) = \sum_{m=0}^{p} C_n^p \Big(\frac{d^{p-m}}{dt^{p-m}}\exp\{\lambda t\}\Big)\Big(\frac{d^m}{dt^m} g(t)\Big) =$$

$$= \exp\{\lambda t\} \sum_{m=0}^{p} \frac{p(p-1)\ldots(p-(m-1))}{m!} \lambda^{p-m} g^{(m)}(t) =$$

$$= \exp\{\lambda t\} \sum_{m=0}^{p} \frac{d^m}{d\lambda^m}\Big(\lambda^p\Big) \frac{g^{(m)}(t)}{m!}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{L}\Big(\exp\{\lambda t\}g(t)\Big) = \sum_{p=0}^{n} a_{n-p} \frac{d^p}{dt^p}\Big(\exp\{\lambda t\}g(t)\Big) =$$

$$= \exp\{\lambda t\} \sum_{p=0}^{n} a_{n-p} \sum_{m=0}^{p} \frac{d^m}{d\lambda^m}\Big(\lambda^p\Big) \frac{g^{(m)}(t)}{m!}$$

$$= \exp\{\lambda t\} \sum_{p=0}^{n} a_{n-p} \sum_{m=0}^{n} \frac{d^m}{d\lambda^m}\Big(\lambda^p\Big) \frac{g^{(m)}(t)}{m!},$$

так как $d^m \lambda^p / d\lambda^m = 0$, $m = p+1, \ldots, n$. Меняя порядок суммирования, получаем

$$\mathcal{L}\Big(\exp\{\lambda t\}g(t)\Big) = \exp\{\lambda t\} \sum_{m=0}^{n} \frac{g^{(m)}(t)}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m}\Big(\sum_{p=0}^{n} a_{n-p}\lambda^p\Big) =$$

$$= \exp\{\lambda t\} \sum_{m=0}^{n} \frac{g^{(m)}(t)}{m!} M^{(m)}(\lambda).$$

□

Лемма 3.4.2. *Для каждого корня λ_j характеристического уравнения (3.30) кратности k_j функции*

$$\exp\{\lambda_j t\}, \quad t\exp\{\lambda_j t\}, \quad \ldots, \quad t^{k_j-1}\exp\{\lambda_j t\}$$

являются решениями однородного уравнения (3.28).

Доказательство. Так как λ_j – корень уравнения (3.30) кратности k_j, то в силу (3.31) справедливо равенство

$$M(\lambda) = (\lambda - \lambda_j)^{k_j} R(\lambda),$$

где $R(\lambda)$ – многочлен степени $n - k_j$. Ясно, что имеют место равенства

$$M^{(m)}(\lambda_j) = \frac{d^m M(\lambda)}{d\lambda^m}\Big|_{\lambda=\lambda_j} = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, k_j - 1.$$

Поэтому из леммы 3.4.1 для $g(t) = t^p$, $p = 0, 1, \ldots, k_j - 1$ имеем

$$\mathcal{L}\Big(\exp\{\lambda_j t\} t^p\Big) = \exp\{\lambda_j t\} \sum_{m=0}^{n} \frac{\big(t^p\big)^{(m)}}{m!} M^{(m)}(\lambda_j) =$$

$$= \exp\{\lambda_j t\} \sum_{m=k_j}^{n} \frac{\big(t^p\big)^{(m)}}{m!} M^{(m)}(\lambda_j) = 0 \quad (\text{ так как } p < k_j).$$

□

Таким образом, мы показали, что функции

$$\exp\{\lambda_j t\}, \quad t\exp\{\lambda_j t\}, \quad \ldots, \quad t^{k_j-1}\exp\{\lambda_j t\}, \quad j = 1, \ldots, \ell. \qquad (3.32)$$

являются решениями однородного дифференциального уравнения (3.28). Количество этих функций совпадает с порядком n дифференциального уравнения (3.28).

Теорема 3.4.4. *Система функций (3.32) составляет фундаментальную систему решений линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами (3.28) на любом отрезке* $[a, b]$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что система функций (3.32) является линейно независимой на любом отрезке $[a, b]$. Предположим, что нетривиальная линейная комбинация функций из системы (3.32) обращается тождественно в ноль на некотором отрезке:

$$\sum_{k=0}^{k_1-1} C_{1,k} t^k \exp\{\lambda_1 t\} + \sum_{k=0}^{k_2-1} C_{2,k} t^k \exp\{\lambda_2 t\} + \dots + \sum_{k=0}^{k_\ell-1} C_{\ell,k} t^k \exp\{\lambda_\ell t\} \equiv 0,$$

или

$$P_1(t) \exp\{\lambda_1 t\} + P_2(t) \exp\{\lambda_2 t\} + \dots + P_\ell(t) \exp\{\lambda_\ell t\} \equiv 0, \tag{3.33}$$

где степень многочлена $s_j = \deg P_j(t) \leqslant k_j - 1$, $j = 1, \dots, \ell$. Без ограничения общности можно считать, что многочлен $P_\ell(t)$ нетривиален, $P_\ell(t) = p_\ell t^{s_\ell} + \dots$, $p_\ell \neq 0$. После умножения (3.33) на $\exp\{-\lambda_1 t\}$ получаем

$$P_1(t) + P_2(t) \exp\{(\lambda_2 - \lambda_1)t\} + \dots + P_\ell(t) \exp\{(\lambda_\ell - \lambda_1)t\} \equiv 0.$$

Дифференцируем в последнем равенстве почленно $s_1 + 1$ раз. Так как $\deg P_1(t) = s_1$, то $\dfrac{d^{s_1+1} P_1(t)}{dt^{s_1+1}} \equiv 0$. Для преобразования остальных слагаемых заметим, что

$$(P_j(t) \exp\{\mu t\})' = (\mu P_j(t) + P_j(t)') \exp\{\mu t\}, \quad \mu = \lambda_j - \lambda_1 \neq 0,$$

то есть при дифференцировании в множителе перед экспонентой остается многочлен той же степени. Тогда

$$\frac{d^{s_1+1}}{dt^{s_1+1}} (P_j(t) \exp\{(\lambda_j - \lambda_1)t\}) = Q_j(t) \exp\{(\lambda_j - \lambda_1)t\},$$
$$\deg Q_j(t) = s_j, \quad Q_j(t) = (\lambda_j - \lambda_1)^{s_1+1} p_j t^{s_j} + \dots.$$

В результате приходим к равенству

$$Q_2(t)\exp\{(\lambda_2-\lambda_1)t\}+\dots+Q_\ell(t)\exp\{(\lambda_\ell-\lambda_1)t\}\equiv 0.$$

После умножения на $\exp\{(\lambda_1-\lambda_2)t\}$ и почленного дифференцирования полученного равенства s_2+1 раз имеем

$$R_3(t)\exp\{(\lambda_3-\lambda_2)t\}+\dots+R_\ell(t)\exp\{(\lambda_\ell-\lambda_2)t\}\equiv 0,\quad \deg R_j(t)=s_j,$$
$$R_j(t)=(\lambda_j-\lambda_2)^{s_2+1}(\lambda_j-\lambda_1)^{s_1+1}p_j t^{s_j}+\dots,\quad j=3,\dots,\ell.$$

Продолжая эту процедуру, на последнем этапе получаем

$$S_\ell(t)\exp\{(\lambda_\ell-\lambda_{\ell-1})t\}\equiv 0,\quad \deg S_\ell(t)=s_\ell,$$
$$S_\ell(t)=(\lambda_\ell-\lambda_{\ell-1})^{s_{\ell-1}+1}\dots(\lambda_\ell-\lambda_2)^{s_2+1}(\lambda_\ell-\lambda_1)^{s_1+1}p_\ell t^{s_\ell}+\dots.$$

Однако полученное равенство противоречит нетривиальности многочлена $P_\ell(t)$ со старшим коэффициентом $p_\ell\neq 0$. Полученное противоречие обосновывает справедливость доказываемого утверждения о линейной независимости системы (3.32). □

16. Теоремы о построении линейного ОДУ n-ого порядка по заданной системе решений и об однозначности определения ОДУ по ФСР. Формула Остроградского-Лиувилля.

В этом параграфе мы сначала рассмотрим вопрос о построении линейного однородного дифференциального уравнения

$$y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = 0, \qquad (3.35)$$

решением которого являются заданные функции. При этом возникают два вопроса, а именно: существует ли линейное дифференциальное уравнение, имеющее своими решениями заданные функции, и единственно ли такое уравнение. Начнем с исследования второго вопроса. Справедлива следующая теорема

Теорема 3.5.1. *Пусть коэффициенты* $a_m(t)$ *непрерывны на отрезке* $[a,b]$, $m = 1,2,\ldots,n$. *Тогда линейное однородное дифференциальное уравнение (3.35) однозначно определяется фундаментальной системой решений.*

Доказательство. Пусть $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ – фундаментальная система решений уравнения (3.35). Предположим, что существует другое дифференциальное уравнение n-го порядка с непрерывными на $[a,b]$ коэффициентами $b_m(t)$, $m = 1,2,\ldots,n$, для которого система $y_1(t)$, $y_2(t)$, $\ldots$ $y_n(t)$ также является фундаментальной. Покажем, что в этом случае $a_m(t) = b_m(t)$, $t \in [a,b]$, $m = 1,2,\ldots,n$.

Действительно, функции $y_k(t)$ являются решениями и того и другого уравнения, то есть

$$y_k^{(n)}(t) + a_1(t)y_k^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y_k'(t) + a_n(t)y_k(t) = 0, \quad t \in [a,b],$$
$$y_k^{(n)}(t) + b_1(t)y_k^{(n-1)}(t) + \cdots + b_{n-1}(t)y_k'(t) + b_n(t)y_k(t) = 0, \quad t \in [a,b],$$

для $k = 1,2,\ldots,n$. Вычитая для каждого k одно равенство из другого получим, что

$$(a_1(t)-b_1(t))y_k^{(n-1)}(t)+\cdots+(a_{n-1}(t)-b_{n-1}(t))y_k'(t)+(a_n(t)-b_n(t))y_k(t) = 0,$$

для $t \in [a,b]$ и $k = 1,2,\ldots,n$. Предположим, что существует точка $t_0 \in (a,b)$ такая, что $a_1(t_0) \neq b_1(t_0)$. Тогда в силу непрерывности функций $a_1(t), b_1(t)$ существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$a_1(t) \neq b_1(t), \quad t \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] \subset [a,b].$$

Поделив на $a_1(t) - b_1(t)$ и обозначив $p_m(t) = \dfrac{a_m(t) - b_m(t)}{a_1(t) - b_1(t)}$, имеем

$$y_k^{(n-1)}(t)+p_2(t)y_k^{(n-2)}(t)+\cdots+p_{n-1}(t)y_k'(t)+p_n(t)y_k(t) = 0, \ t \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon],$$

для $k = 1,2,\ldots,n$. Таким образом, мы получили, что n линейно независимых функций $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ являются решениями линейного однородного дифференциального уравнения $(n-1)$-го порядка с непрерывными коэффициентами $p_m(t)$. Но из теоремы об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения следует, что уравнение $(n-1)$-го порядка имеет только $n-1$ линейно независимое решение. Полученное противоречие доказывает, что $a_1(t) = b_1(t)$, $t \in [a,b]$. Доказательство равенства остальных функций проводится аналогично. Теорема 3.5.1 доказана. $\square$

Рассмотрим теперь вопрос о существовании линейного дифференциального уравнения, решением которого являлась бы заданная система функций.

Теорема 3.5.2. *Пусть n раз непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$ функции $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ таковы, что составленный из них определитель Вронского $W[y_1, y_2, \ldots, y_n](t)$ не равен нулю ни в одной точке отрезка $[a, b]$.*

Тогда существует линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка такое, что функции $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ являются его фундаментальной системой решений.

Доказательство. Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка для неизвестной функции $y(t)$

$$\det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) & y(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \ldots & y_n'(t) & y'(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) & \ldots & y_n''(t) & y''(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) & y^{(n-1)}(t) \\ y_1^{(n)}(t) & y_2^{(n)}(t) & \ldots & y_n^{(n)}(t) & y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = 0. \qquad (3.36)$$

Для того, чтобы убедиться в том, что уравнение (3.36) действительно представляет собой линейное дифференциальное уравнение n-го порядка, достаточно разложить определитель по последнему столбцу. Коэффициент при старшей производной $y^{(n)}(t)$ представляет собой определитель Вронского, составленный из заданных функций $y_1(t)$, $y_2(t)$, $\ldots$ $y_n(t)$, и по условию теоремы отличен от нуля на $[a, b]$. Поделив на этот определитель, мы получим дифференциальное уравнение вида (3.35) с непрерывными на отрезке $[a, b]$ коэффициентами. Все функции $y_1(t)$, $y_2(t)$, $\ldots$ $y_n(t)$ являются решениями полученного уравнения, так как при подстановке функции $y(t) = y_k(t)$ в уравнение (3.36) мы имеем слева определитель с двумя одинаковыми столбцами. Теорема 3.5.2 доказана. $\square$

3.5.2. Формула Остроградского-Лиувилля

Используя представление линейного дифференциального уравнения в виде (3.36), можно получить формулу для определителя Вронского. При выводе этой формулы мы используем следующее правило дифференцирования функциональных определителей.

Пусть $D(t)$ – определитель n-го порядка, элементами которого являются функции, непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$. Производная $D'(t)$ определителя $D(t)$ равна сумме n определителей, каждый из которых получен из $D(t)$ путем замены одной из его строк на строку из производных.

Из этого правила следует простая формула для производной определителя Вронского $\Delta(t) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n](t)$, составленного из системы n раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$,

$$\Delta'(t) = \det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_{n-1}(t) & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \ldots & y_{n-1}'(t) & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & y_2^{(n-2)}(t) & \ldots & y_{n-1}^{(n-2)}(t) & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n)}(t) & y_2^{(n)}(t) & \ldots & y_{n-1}^{(n)}(t) & y_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}.$$

Действительно, применим правило вычисления производной функционального определителя к определителю Вронского $\Delta(t)$. Все определители, в которых на производные заменяется любая строка, кроме последней, будут равны нулю, как определители, имеющие одинаковые строки. Следовательно, только последний определитель, в котором на производные заменена последняя строка, и представляет собой производную $\Delta'(t)$.

Пусть $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ – фундаментальная система решений уравнения (3.35). Из теоремы 3.5.1 следует, что это уравнение однозначно определяется своей фундаментальной системой. Значит, поделив уравнение (3.36) на определитель Вронского $\Delta(t)$, мы получим уравнение (3.35). Тогда из записи уравнения (3.36) следует, что коэффициент

$$a_1(t) = -\frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)}.$$

Интегрируя от t_0 до t, получим формулу Остроградского-Лиувилля

$$\Delta(t) = \Delta(t_0) \exp\Big\{-\int_{t_0}^{t} a_1(\tau) d\tau\Big\}, \quad t \in [a, b].$$

Следствие 3.5.1. *Если коэффициент $a_1(t) = 0$, $t \in [a, b]$, то определитель Вронского $W[y_1, y_2, \ldots, y_n](t)$ постоянен на отрезке $[a, b]$.*

17. Общая теория однородных линейных систем ОДУ. Теорема об эквивалентности системы ОДУ матричному ОДУ. Свойства решений матричного ОДУ.

Определение 4.1.1. *Система (4.1) называется однородной, если $\overline{f}(t) \equiv \overline{\theta}$ на отрезке $[a, b]$. В противном случае система (4.1) называется неоднородной.*

Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ нормальную систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в векторной форме с непрерывными на отрезке $[a, b]$ действительными коэффициентами $a_{i,j}(t)$ и непрерывными комплекснозначными $f_k(t)$:

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t) + \overline{f}(t), \quad t \in [a, b], \tag{4.1}$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \overline{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Напомним, что решение $\overline{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))^\top$ системы (4.1) является, вообще говоря, комплекснозначной вектор-функцией $\overline{y}(t) = \overline{u}(t) + i\overline{v}(t)$, где

$$\overline{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))^\top, \quad \overline{v}(t) = (v_1(t), \ldots, v_n(t))^\top,$$

а $u_j(t)$, $v_j(t)$ действительны, $j = 1, \ldots, n$, В дальнейшем, если не оговорено особо, речь пойдет именно о комплекснозначных решениях.

Здесь и далее $\overline{\theta} = (0, \ldots, 0)^\top$ обозначает нулевой вектор-столбец соответствующей размерности.

Пусть имеется n вектор-функций

$$\overline{y}_j(t) = \big(y_{1j}(t), \ldots, y_{nj}(t)\big)^\top, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Составим матрицу $Y(t)$, столбцами которой являются данные вектор-функции:

$$Y(t) = (\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & \cdots & y_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(t) & \cdots & y_{nn}(t) \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Сопоставим системе (4.2) матричное однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t), \tag{4.4}$$

где производная матричной функции равна матрице, состоящей из производных элементов исходной матрицы, то есть $dY(t)/dt = \big(dy_{ij}(t)/dt\big)$.

По определению, решением матричного дифференциального уравнения (4.4) на отрезке $[a, b]$ называется непрерывно дифференцируемая на данном отрезке матричная функция вида (4.3), обращающая уравнение (4.4) в тождество. Уравнение (4.4) имеет по сравнению с системой (4.2) более симметричную форму записи, напоминающую скалярное уравнение первого порядка: и "коэффициент"$A(t)$ уравнения и искомая функция $Y(t)$ являются объектами одинаковой природы – матричными функциями. Связь между решениями системы (4.2) и матричным уравнением (4.4) устанавливает следующая теорема.

Теорема 4.1.1. *Вектор-функции* $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)$ *являются решениями однородной системы (4.2) на отрезке* $[a, b]$ *тогда и только тогда, когда составленная из этих функций матрица* $Y(t)$ *вида (4.3) является решением матричного дифференциального уравнения (4.4).*

Доказательство. Для доказательства необходимости рассмотрим решения $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)$ системы (4.2) и составим из них матрицу $Y(t)$ вида (4.3). Поскольку

$$\frac{d\overline{y}_j(t)}{dt} = A(t)\overline{y}_j(t), \quad j = 1, \ldots, n,$$

то для соответствующей матричной производной, элементы которой сгруппированы по столбцам, получаем равенства

$$\frac{dY(t)}{dt} = \left(\frac{d\overline{y}_1(t)}{dt}, \frac{d\overline{y}_2(t)}{dt}, \ldots, \frac{d\overline{y}_n(t)}{dt}\right) =$$
$$= (A\overline{y}_1(t), A\overline{y}_2(t), \ldots, A\overline{y}_n(t)) = A(t)Y(t).$$

То есть выполнено матричное уравнение (4.4). Аналогично, расписывая матричное уравнение (4.4) по столбцам, доказывается достаточность. □

Теорема 4.1.2. *Пусть матричная функция $Y(t)$ является решением матричного уравнения (4.4). Тогда:*

1. *для любого вектора констант $\overline{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top$, $c_j \in \mathbb{C}$, вектор-функция $\overline{y}(t) = Y(t)\overline{c}$ удовлетворяет системе (4.2);*

2. *для любой матрицы констант $B = \big(b_{i,j}\big)$, $b_{i,j} \in \mathbb{C}$, $i, j = 1, \ldots, n$, матричная функция $X(t) = Y(t)B$ удовлетворяет уравнению (4.4).*

Доказательство. 1. Если матричная функция

$$Y(t) = (\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t))$$

является решением уравнения (4.4), то по теореме 4.1.1 вектор-столбцы $\overline{y}_j(t)$ являются решениями системы (4.2), также как и их линейная комбинация

$$\overline{y}(t) = Y(t)\overline{c} = \sum_{j=1}^{n} c_j \overline{y}_j(t).$$

2. В силу линейности операции дифференцирования и ассоциативности операции произведения матриц, имеем:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\{Y(t)B\} = \frac{dY(t)}{dt} \cdot B =$$
$$= \{A(t)Y(t)\} B = A(t)\{Y(t)B\} = A(t)X(t).$$

□

18. Линейная зависимость и независимость вектор-функций. Определитель Вронского. Теорема о необходимом условии линейной зависимости вектор-функций. Примеры.

4.2.1. Линейная зависимость произвольных вектор-функций

В этом параграфе рассматриваются произвольные комплекснозначные вектор-функции $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_m(t)$, определенные на отрезке $[a,b]$, то есть $\overline{y}_j(t) = (y_{j1}(t), \ldots, y_{jm}(t))^\top$, $j = 1, \ldots, m$, $m \in \mathbb{N}$. Никакая связь с решениями дифференциальных уравнений и даже непрерывность этих функций пока не предполагаются.

Определение 4.2.1. *Вектор-функции $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_m(t)$ называются линейно зависимыми на отрезке $[a,b]$, если найдутся комплексные константы $c_1, c_2, \ldots, c_m$, $\sum\limits_{j=1}^{m} |c_j| > 0$ такие, что*

$$c_1\overline{y}_1(t) + c_2\overline{y}_2(t) + \cdots + c_m\overline{y}_m(t) = \overline{\theta}, \quad \forall t \in [a,b]. \tag{4.5}$$

Если же равенство (4.5) выполнено только для тривиального вектора констант, $\overline{c} = (0, \ldots, 0)^\top$, то вектор-функции $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_m(t)$ называются линейно независимыми на отрезке $[a,b]$.

Эквивалентная (4.5) векторная форма записи условия линейной зависимости состоит в том, что для матричной функции $Y(t)$ порядка $m \times m$ выполнено равенство

$$Y(t)\overline{c} = \overline{\theta}, \quad \forall t \in [a,b] \tag{4.6}$$

хотя бы для одного ненулевого вектора констант $\overline{c} = (c_1, \ldots, c_m)^\top$.

Замечание 4.2.1. *Если рассматриваемые вектор-функции принимают только вещественные значения, то в определениях линейной зависимости и независимости достаточно рассматривать лишь действительные коэффициенты c_j, $j = 1, \ldots, m$.*

Определение 4.2.2. *Определителем Вронского системы заданных на отрезке $[a,b]$ вектор функций $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_m(t)$ называется зависящий от переменной $t \in [a,b]$ определитель матричной функции $Y(t) = (\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_m(t))$:*

$$\Delta(t) = \det Y(t).$$

Пример 4.2.1. *Для $m = 2$ рассмотрим на отрезке $[-1, 1]$ две вектор-функции, имеющие нулевой определитель Вронского:*

$$\overline{y}_1(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}, \; \overline{y}_2(t) = \begin{pmatrix} t^2|t| \\ t|t| \end{pmatrix}, \; Y(t) = \begin{pmatrix} t^3 & t^2|t| \\ t^2 & t|t| \end{pmatrix}, \; \Delta(t) = \det Y(t) \equiv 0.$$

Эти вектор-функции являются линейно независимыми на рассматриваемом отрезке. Действительно, если для некоторого вектора $\overline{c} = (c_1, c_2)^\top$ справедливо равенство $Y(t)\overline{c} = \overline{\theta}$ в каждой точке отрезка $[-1, 1]$, то при $t = 1$ должно выполняться равенство $c_1 + c_2 = 0$, а при $t = -1$ – равенство $c_1 - c_2 = 0$, откуда $c_1 = c_2 = 0$.

Теорема 4.2.1. *Если система вектор функций $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots \overline{y}_m(t)$ является линейно зависимой на отрезке $[a, b]$, то определитель Вронского этой системы тождественно равен нулю на этом отрезке:*

$$\Delta(t) = 0, \quad \forall t \in [a, b].$$

Доказательство. Из условия линейной зависимости (4.6) вытекает существование такого ненулевого вектора $\overline{c} = (c_1, \ldots, c_m)^\top$, что для произвольного фиксированного $t_0 \in [a, b]$ справедливо равенство

$$Y(t_0)\overline{c} = \overline{\theta}. \tag{4.7}$$

Равенство (4.7) означает, что однородная система линейных алгебраических уравнений с числовой матрицей $Y(t_0)$ имеет нетривиальное решение $\overline{c}$. По известной теореме алгебры это возможно только для вырожденной матрицы, то есть $\det Y(t_0) = 0$. □

19. Линейная зависимость и независимость решений линейной однородной системы ОДУ. Теорема об альтернативе для определителя Вронского.

4.2.2. Линейная зависимость и независимость решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему из n-мерных вектор-функций $\overline{y}_1(t)$, $\overline{y}_2(t)$, ... $\overline{y}_n(t)$, являющихся решением линейной однородной системы дифференциальных уравнений (4.2), $Y(t)$ – соответствующая матричная функция из (4.3). Подчеркнем, что количество вектор-функций совпадает с порядком системы. Исследуем вопрос о связи свойства линейной зависимости решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений и значения определителя Вронского.

Теорема 4.2.2. *Пусть $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)$ – система вектор-функций решений линейной однородной системы (4.2) на отрезке $[a, b]$. Если найдется точка $t_0 \in [a, b]$, для которой*

$$\det Y(t_0) = 0,$$

то система вектор-функций $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)$ линейно зависима на отрезке $[a, b]$ и

$$\det Y(t) = 0, \quad \forall t \in [a, b].$$

Доказательство. Однородная система линейных алгебраических уравнений относительно вектора $\overline{c} = (c_1, \ldots, c_n)^\top$

$$Y(t_0)\overline{c} = \overline{\theta} \tag{4.8}$$

имеет ненулевое решение $\overline{c}^0 = (c_1^0, \ldots, c_n^0)^\top$ в силу вырожденности числовой матрицы $Y(t_0)$, имеющей нулевой определитель.

Положим $\overline{y}(t) = Y(t)\overline{c}^0$. Ясно, что $\overline{y}(t)$ – решение однородной системы (4.2) в силу первой части теоремы 4.1.2 и, кроме того, $\overline{y}(t_0) = \overline{\theta}$ в силу (4.8). Таким образом, построенная функция является решением задачи Коши с нулевым начальным условием при $t = t_0$:

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t), \quad \overline{y}(t_0) = \overline{\theta}.$$

Эта задача Коши по теореме существования и единственности 2.1.2 имеет на рассматриваемом отрезке только одно решение – нулевое. Поэтому

$$\overline{\theta} = \overline{y}(t) = Y(t)\overline{c}^0 = c_1^0\overline{y}_1(t) + c_2^0\overline{y}_2(t) + \cdots + c_n^0\overline{y}_n(t), \quad \forall t \in [a, b],$$

и рассматриваемая система вектор-функций является линейно зависимой на отрезке $[a, b]$. Тогда в силу теоремы 4.2.1 имеем $\det Y(t) = 0$, $\forall t \in [a, b]$. $\square$

Из теорем 4.2.1 и 4.2.2 вытекает следующая теорема об альтернативе для определителя Вронского системы вектор-функций решений линейной однородной системы.

Теорема 4.2.3. *Определитель Вронского для вектор-функций $\overline{y}_1(t)$, $\overline{y}_2(t)$, ..., $\overline{y}_n(t)$, являющихся решениями линейной однородной системы дифференциальных уравнений (4.2) на отрезке $[a, b]$, либо тождественно равен нулю, $\det Y(t) \equiv 0$ (и система вектор-функций линейно зависима), либо не обращается в ноль ни в одной точке, $\det Y(t) \neq 0$, $\forall t \in [a, b]$ (и система вектор-функций линейно независима).*

Замечание 4.2.2. *Согласно теореме 4.2.3, система вектор-функций*

$$\overline{y}_1(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad \overline{y}_2(t) = \begin{pmatrix} t^2|t| \\ t|t| \end{pmatrix}$$

из примера 4.2.1 не может являться решением никакой однородной системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с непрерывными на отрезке $[-1, 1]$ коэффициентами.

20. ФСР линейной однородной системы ОДУ. Теорема о существовании ФСР. Теорема об общем решении линейной однородной системы ОДУ. Матрицант.

Определение 4.3.1. ***Фундаментальной системой решений*** *линейной однородной системы дифференциальных уравнений $\dfrac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t)$ порядка n на отрезке $[a, b]$ называется совокупность n линейно независимых решений $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)$ этой системы. Соответствующая этим решениям функциональная матрица*

$$Y(t) = (\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t))$$

называется ***фундаментальной матрицей****.*

В силу теоремы (4.1.2) фундаментальная матрица является решением матричного дифференциального уравнения (4.4), а в силу теоремы (4.2.3) она имеет на отрезке $[a, b]$ отличный от нуля определитель, $\det Y(t) \neq 0$.

Теорема 4.3.1. *Для любой однородной системы линейных дифференциальных уравнений вида (4.2) с непрерывными на отрезке $[a, b]$ коэффициентами существует фундаментальная система решений.*

Доказательство. Зафиксируем любое $t_0 \in [a, b]$ и рассмотрим задачу Коши для матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t), \quad Y(t_0) = E, \tag{4.9}$$

где E – единичная матрица. Расписывая матричные равенства по столбцам, заключаем, что задача (4.9) эквивалентна совокупности из n задач Коши

$$\frac{d\overline{y}_j(t)}{dt} = A(t)\overline{y}_j(t), \quad \overline{y}_j(t_0) = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \ldots, 0)^\top, \quad j = 1, \ldots, n,$$

отличающихся лишь начальными данными. Существование на всем отрезке $[a, b]$ решений $\overline{y}_j(t)$ этих задач Коши, а значит и решения $Y(t)$ матричной задачи (4.9), вытекает из теоремы 2.1.2. Поскольку определитель матричной функции $Y(t)$ в силу (4.9) равен 1, $\det Y(t_0) = \det E = 1$, то линейная независимость на рассматриваемом отрезке построенной системы решений $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)$ есть следствие теоремы 4.2.3 об альтернативе для определителя Вронского. Таким образом, $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)$ – фундаментальная система решений, а $Y(t)$ – фундаментальная матрица. □

Замечание 4.3.1. *Фундаментальная матрица неединственна. Полагая в задаче Коши (4.9) начальное условие $Y(t_0) = B$, $\det B \neq 0$, мы получим другую фундаментальную матрицу.*

Замечание 4.3.2. *Так как элементы $a_{ij}(t)$ матрицы системы вещественны, то и фундаментальная матрица может быть выбрана вещественной.*

Определение 4.3.2. *Общим решением линейной однородной системы дифференциальных уравнений n-го порядка называется зависящее от n произвольных постоянных решение этого уравнения такое, что любое другое решение системы может быть получено из него в результате выбора некоторых значений этих постоянных.*

Теорема 4.3.2. *Пусть* $Y(t) = (\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t))$ *– фундаментальная матрица для линейной однородной системы*

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t)$$

на отрезке $[a, b]$. *Тогда ее общее решение представимо в виде*

$$\overline{y}_{OO}(t) = c_1\overline{y}_1(t) + c_2\overline{y}_2(t) + \cdots + c_n\overline{y}_n(t) = Y(t)\overline{c}, \tag{4.10}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *– произвольные постоянные,* $\overline{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Доказательство. По теореме 4.1.2 вектор-функция $Y(t)\overline{c}$ является решением однородной системы для любых $\overline{c} \in \mathbb{C}^n$. Согласно определению общего решения осталось показать, что для любого наперед заданного решения $\overline{y}(t)$ линейной однородной системы найдется вектор констант $\widetilde{c} \in \mathbb{C}^n$ такой, что на отрезке $[a, b]$ выполнено равенство

$$\overline{y}(t) = Y(t)\widetilde{c}. \tag{4.11}$$

Для построения $\widetilde{c}$ зафиксируем произвольное $t_0 \in [a, b]$ и вычислим $\overline{y}^0 = \overline{y}(t_0)$. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений относительно $\widetilde{c} = (\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \ldots, \widetilde{c}_n)^\top$:

$$Y(t_0)\widetilde{c} = \overline{y}^0. \tag{4.12}$$

В силу невырожденности матрицы $Y(t_0)$ с определителем $\det Y(t_0) \neq 0$ эта система имеет единственное решение $\widetilde{c} = (\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \ldots, \widetilde{c}_n)^\top$. Тогда функции $\widetilde{y}(t) = Y(t)\widetilde{c}$ и $\overline{y}(t)$ являются решениями одной и той же задачи Коши

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t), \quad \overline{y}(t_0) = \overline{y}^0, \tag{4.13}$$

и по теореме единственности обязаны совпадать, что доказывает (4.11). Отметим, что для фиксированного решения $\overline{y}(t)$ вектор констант $\widetilde{c} \in \mathbb{C}^n$ в представлении (4.11) определен однозначно. □

Следствие 4.3.1. *В ходе доказательства теоремы 4.3.2 была фактически выведена формула для решения задачи Коши (4.13) с произвольным начальным вектором* $\overline{y}^0$. *Действительно, из (4.12) имеем* $\widetilde{c} = Y^{-1}(t_0)\overline{y}^0$ *и после использования (4.11) получаем*

$$\overline{y}(t) = Z(t, t_0)\overline{y}^0, \quad Z(t, t_0) = Y(t)Y^{-1}(t_0). \tag{4.14}$$

Функциональная матрица $Z(t, t_0)$ *называется* ***матрицантом****. Как матричная функция переменной* t *она является решением следующей задачи Коши*

$$\frac{dZ(t, t_0)}{dt} = A(t)Z(t, t_0), \quad Z(t_0, t_0) = Y(t_0)Y^{-1}(t_0) = E.$$

21. Теорема об общем решении линейной неоднородной системы ОДУ. Метод вариации постоянных.

4.3.3. Общее решение линейной неоднородной системы, метод вариации постоянных

Рассмотрим линейную неоднородную систему с непрерывным вектором $\overline{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))^\top$:

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t) + \overline{f}(t), \quad t \in [a, b]. \tag{4.15}$$

Как и в предыдущем пункте, $Y(t)$ обозначает фундаментальную матрицу соответствующей (4.15) однородной системы $d\overline{y}(t)/dt = A(t)\overline{y}(t)$ с той же самой матрицей коэффициентов $A(t)$.

Определение 4.3.3. *Общим решением линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений n-го порядка (4.15) называется зависящее от n произвольных постоянных решение этой системы такое, что любое другое решение системы (4.15) может быть получено из него в результате выбора некоторых значений этих постоянных.*

Теорема 4.3.3. *Общее решение $\overline{y}_{OH}(t)$ линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений (4.15) представимо в виде*

$$\overline{y}_{OH}(t) = Y(t)\overline{c} + \overline{y}_H(t), \quad \forall \overline{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top \in \mathbb{C}^n, \tag{4.16}$$

где $\overline{y}_H(t)$ – некоторое (частное) решение неоднородной системы (4.15).

Доказательство. В силу линейности системы (4.15) вектор-функция $\overline{y}_{OH}(t)$ является решением (4.15) для любого вектора констант $\overline{c} \in \mathbb{C}^n$.

Согласно определению общего решения, осталось показать, что для любого наперед заданного решения $\widetilde{y}(t)$ системы (4.15) найдется вектор констант $\widetilde{c} \in \mathbb{C}^n$ такой, что на отрезке $[a,b]$ будет выполнено равенство

$$\widetilde{y}(t) = Y(t)\widetilde{c} + \overline{y}_H(t). \tag{4.17}$$

Пусть $\widetilde{y}(t)$ – решение (4.15). Разность $\overline{y}(t) = \widetilde{y}(t) - \overline{y}_H(t)$ двух решений неоднородной системы является решением однородной системы, $d\overline{y}(t)/dt = A(t)\overline{y}(t)$. Тогда по теореме 4.3.2 об общем решении линейной однородной системы найдется такой вектор констант $\widetilde{c} \in \mathbb{C}^n$, что на рассматриваемом отрезке выполнено равенство $\overline{y}(t) = Y(t)\widetilde{c}$, которое приводит к (4.17). □

Построение одного из частных решений неоднородной системы может быть проведено методом вариации постоянных и выражено с помощью введенного в (4.14) матриканта $Z(t,\tau)$.

Теорема 4.3.4. *Для любого $t_0 \in [a,b]$ формула*

$$\overline{y}_H(t) = \int\limits_{t_0}^{t} Z(t,\tau)\overline{f}(t)d\tau, \quad t \in [a,b], \tag{4.18}$$

задает частное решение неоднородной системы (4.15), удовлетворяющее условию $\overline{y}_H(t_0) = 0$.

Доказательство. Воспользуемся методом вариации постоянных, согласно которому частное решение неоднородной системы ищется в виде, повторяющем структуру (4.10) общего решения однородной системы, в котором вектор констант $\overline{c}$ заменен на пока произвольную непрерывно дифференцируемую вектор-функцию $\overline{c}(t) = (c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t))^\top$, а именно:

$$\overline{y}(t) = Y(t)\overline{c}(t). \tag{4.19}$$

Поскольку фундаментальная матрица удовлетворяет однородному уравнению $dY(t)/dt = A(t)Y(t)$, то

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = \frac{dY(t)}{dt}\overline{c}(t) + Y(t)\frac{d\overline{c}(t)}{dt} = A(t)Y(t)\overline{c}(t) + Y(t)\frac{d\overline{c}(t)}{dt}. \tag{4.20}$$

Подставляя выражения (4.19) и (4.20) в уравнение (4.15), получаем уравнение для определения вектор-функции $\overline{c}(t)$:

$$Y(t)\frac{d\overline{c}(t)}{dt} = \overline{f}(t). \tag{4.21}$$

В силу невырожденности фундаментальной матрицы это уравнение можно переписать в виде $d\overline{c}(t)/dt = Y^{-1}(t)\overline{f}(t)$ и проинтегрировать от t_0 до t. Полагая по определению, что интеграл от вектор-функции есть вектор, составленный из интегралов координатных функций, имеем

$$\overline{c}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)\overline{f}(\tau)d\tau.$$

После подстановки в (4.19) окончательно получаем

$$\overline{y}(t) = Y(t)\overline{c}(t) = Y(t)\int\limits_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)\overline{f}(\tau)d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} Z(t,\tau)\overline{f}(\tau)d\tau.$$

$\square$

Следствие 4.3.2. *Решение $\overline{y}(t) = \overline{y}(t;\overline{y}_0)$ задачи Коши для линейной неоднородной системы*

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t) + \overline{f}(t), \quad t \in [a,b]$$

с заданным в точке $t_0 \in [a,b]$ начальным условием

$$\overline{y}(t_0) = \overline{y}_0$$

имеет вид

$$\overline{y}(t;\overline{y}_0) = Z(t,t_0)\overline{y}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} Z(t,\tau)\overline{f}(\tau)d\tau. \tag{4.22}$$

22. Теорема о построении ФСР системы ОДУ с постоянными коэффициентами в случае существования базиса из собственных векторов матрицы системы.

4.4.1. Построение фундаментальной системы решений, когда существует базис из собственных векторов

Поскольку характеристический многочлен имеет степень n, то по основной теореме алгебры у него имеется ровно n корней (собственных значений), с учетом их кратности $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Из курса линейной алгебры известно, что существует не более, чем n линейно независимых собственных векторов матрицы A. Остановимся сначала на случае, когда количество линейно независимых собственных векторов в точности равно n. Заметим, что в этом случае собственные векторы составляют базис пространства $\mathbb{C}^n$.

Теорема 4.4.1. *Пусть у матрицы A имеется ровно n линейно независимых собственных векторов*

$$\overline{h}_1, \quad \overline{h}_2, \quad \ldots, \quad \overline{h}_n,$$

отвечающих соответствующим собственным значениям

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n.$$

Тогда вектор-функции

$$\overline{y}_1(t) = \overline{h}_1 \exp\{\lambda_1 t\},\ \overline{y}_2(t) = \overline{h}_2 \exp\{\lambda_2 t\},\ \ldots\ \overline{y}_n(t) = \overline{h}_n \exp\{\lambda_n t\} \quad (4.27)$$

образуют фундаментальную систему решений (4.23) на произвольном отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный отрезок $[a, b]$. Для любого $j = 1, \ldots, n$ собственное значение λ_j и соответствующий собственный вектор $\overline{h}_j$ удовлетворяют уравнению (4.25), и тогда каждая из вектор-функций $\overline{y}_j(t) = \overline{h}_j \exp\{\lambda_j t\}$ является решением системы (4.23) на $[a, b]$ по построению.

Докажем линейную независимость на отрезке $[a, b]$ построенной системы функций. Для этого, согласно теореме 4.2.3 об альтернативе для определителя Вронского, достаточно убедиться, что $\det Y(t) \neq 0$ для некоторого $t \in [a, b]$, где $Y(t) = (\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t))$. Рассмотрим отрезок $[c, d]$, включающий в себя исходный отрезок $[a, b]$ и точку $t = 0$:

$$[a, b] \subseteq [c, d], \quad 0 \in [c, d].$$

Вектор-функции из (4.27) являются решениями системы (4.23) на отрезке $[c, d]$. В принадлежащей этому отрезку точке $t = 0$ определитель Вронского

$$\det Y(0) = \det(\overline{h}_1, \overline{h}_2, \ldots, \overline{h}_n) \neq 0,$$

так как в противном случае составляющие $Y(0)$ столбцы – собственные векторы $\overline{h}_1, \overline{h}_2, \ldots, \overline{h}_n$ – были бы линейно зависимыми. Согласно теореме 4.2.3 об альтернативе для определителя Вронского $\det Y(t) \neq 0$ на всем отрезке $[c, d]$, а значит и на его части $[a, b]$. □

23. Теорема о построении ФСР системы ОДУ с постоянными коэффициентами в случае, когда нет базиса из собственных векторов матрицы системы. Вопросы по курсу

Рассмотрим случай, когда количество существующих у матрицы A линейно независимых собственных векторов строго меньше, чем порядок системы n. Выпишем все попарно различные собственные значения λ_j с соответствующими кратностями k_j:

$$\begin{array}{lllll} \lambda_1, & \lambda_2, & \ldots, & \lambda_\ell & , \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j, \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_\ell & , \quad k_j \geqslant 1, \quad k_1 + k_2 + \cdots + k_\ell = n. \end{array}$$

Пусть далее $\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell\}$ обозначает одно из собственных значений с соответствующей кратностью k. Покажем, что каждому такому собственному значению можно сопоставить ровно k вектор-функций, являющихся решениями однородной системы (4.23). Если размерность $s = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda E)$ собственного подпространства, определяющая количество линейно независимых собственных векторов для данного собственного значения, равна кратности собственного значения, $s = k$, то искомые функции строятся согласно (4.27).

Если размерность собственного подпространства меньше кратности собственного значения, $s < k$, то, как известно из курса линейной алгебры, можно выбрать собственные векторы $\overline{h}_1^1$, $\overline{h}_2^1$, …, $\overline{h}_s^1$ так, что состоящая ровно из k векторов система собственных векторов $\overline{h}_j^1$ и присоединенных векторов $\overline{h}_j^m$, $m = 2, \ldots, p_j$, $j = 1, \ldots, s$, $p_j \geqslant 1$, $p_1 + p_2 + \cdots + p_s = k$, которую запишем в виде

$$\begin{array}{ccccc} \overline{h}_1^1, & \ldots & \overline{h}_j^1, & \ldots & \overline{h}_s^1, \\ \overline{h}_1^2, & \ldots & \overline{h}_j^2, & \ldots & \overline{h}_s^2, \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \overline{h}_1^{p_1}, & \ldots & \overline{h}_j^{p_j}, & \ldots & \overline{h}_s^{p_s}, \end{array}$$

удовлетворяет уравнениям

$$\begin{array}{rcl} A\overline{h}_j^1 & = & \lambda\overline{h}_j^1, \\ A\overline{h}_j^2 & = & \lambda\overline{h}_j^2 + \overline{h}_j^1, \\ & \ldots & \\ A\overline{h}_j^m & = & \lambda\overline{h}_j^m + \overline{h}_j^{m-1}, \\ & \ldots & \\ A\overline{h}_j^{p_j} & = & \lambda\overline{h}_j^{p_j} + \overline{h}_j^{p_j-1}. \end{array} \tag{4.28}$$

С помощью собственных и присоединенных векторов построим семейство из следующих k функций

$$\begin{aligned}
\overline{y}_j^1(t) &= \overline{h}_j^1 \exp\{\lambda t\}, \\
\overline{y}_j^2(t) &= \left(\overline{h}_j^2 + \frac{t}{1!}\overline{h}_j^1\right)\exp\{\lambda t\}, \qquad (4.29) \\
\vdots &
\end{aligned}$$

$$\overline{y}_j^m(t) = \left(\overline{h}_j^m + \frac{t}{1!}\overline{h}_j^{m-1} + \frac{t^2}{2!}\overline{h}_j^{m-2} + \dots + \frac{t^q}{q!}\overline{h}_j^{m-q} + \dots \right.$$
$$\left. \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\overline{h}_j^1\right) \exp\{\lambda t\},$$
$$\vdots$$
$$\overline{y}_j^{p_j}(t) = \left(\overline{h}_j^{p_j} + \frac{t}{1!}\overline{h}_j^{p_j-1} + \frac{t^2}{2!}\overline{h}_j^{p_j-2} + \dots + \frac{t^q}{q!}\overline{h}_j^{p_j-q} + \dots \right.$$
$$\left. \dots + \frac{t^{p_j-1}}{(p_j-1)!}\overline{h}_j^1\right) \exp\{\lambda t\},$$
$$j = 1, \dots, s.$$

Докажем, что все функции из построенного семейства являются решениями линейной однородной системы (4.23). Рассмотрим функцию $\overline{y}_j^m(t)$, вычислим ее производную $d\overline{y}_j^m(t)/dt$ и сгруппируем результат так, чтобы удобно было воспользоваться соотношениями (4.28). Имеем

$$\frac{d\overline{y}_j^m(t)}{dt} =$$
$$= \left(\overline{h}_j^{m-1} + \frac{t}{1!}\overline{h}_j^{m-2} + \frac{t^2}{2!}\overline{h}_j^{m-3} + \dots + \frac{t^q}{q!}\overline{h}_j^{m-q-1} + \dots + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}\overline{h}_j^1 + \right.$$
$$+ \lambda\overline{h}_j^m + \frac{t}{1!}\lambda\overline{h}_j^{m-1} + \frac{t^2}{2!}\lambda\overline{h}_j^{m-2} + \dots + \frac{t^q}{q!}\lambda\overline{h}_j^{m-q} + \dots + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}\lambda\overline{h}_j^2 +$$
$$\left. + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\lambda\overline{h}_j^1\right) \exp\{\lambda t\} =$$
$$= \left(A\overline{h}_j^m + \frac{t}{1!}A\overline{h}_j^{m-1} + \frac{t^2}{2!}A\overline{h}_j^{m-2} + \dots + \frac{t^q}{q!}A\overline{h}_j^{m-q} + \dots \right.$$
$$\left. \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}A\overline{h}_j^1\right) \exp\{\lambda t\} = A\overline{y}_j^m(t),$$
$$m = 1, \dots, p_j, \quad j = 1, \dots, s.$$

Следовательно, $\overline{y}_j^m(t)$ – решения системы (4.23).

Докажем, что система из n вектор-функций, состоящая из объединения построенных для всех $\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell\}$ решений вида (4.29), является линейно независимой на произвольном отрезке $[a, b]$. Рассмотрим отрезок $[c, d]$, $[a, b] \subseteq [c, d]$, $0 \in [c, d]$. Вектор-функции из (4.29)

являются решениями системы (4.23) на отрезке $[c, d]$. В принадлежащей этому отрезку точке $t = 0$ определитель Вронского этой системы отличен от нуля, поскольку соответствующая матрица $Y(0)$ составлена из столбцов, являющихся собственными и присоединенными векторами матрицы A, совокупность которых линейно независима и образует базис в $\mathbb{C}^n$. Согласно теореме 4.2.3 об альтернативе для определителя Вронского, $\det Y(t) \neq 0$ на всем отрезке $[c, d]$, а значит и на его части $[a, b]$. Поэтому рассматриваемая система решений (4.23) является линейно независимой на $[a, b]$ и, следовательно, составляет фундаментальную систему решений на этом отрезке. Тем самым установлена справедливость следующей теоремы.

Теорема 4.4.2. *Система из n вектор-функций, состоящая из объединения построенных для всех различных собственных значений λ_1, λ_2, … λ_ℓ решений вида (4.29), является фундаментальной системой решений (4.23) на произвольном отрезке $[a, b]$.*

"Обыкновенные дифференциальные уравнения". Весна 2025 г. Вторая часть.

1. Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от правой части и начальных данных. Теорема сравнения.

1.1. Непрерывная зависимость решения задачи Коши от исходных данных

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= f(t, y(t)), \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T], && (1.1)\\
y(t_0) &= y_0. && (1.2)
\end{aligned}
$$

Пусть функция $f(t, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике

$$
Q = \{(t, y): \quad |t - t_0| \leqslant T, \quad A \leqslant y \leqslant B\}.
$$

Определение 1.1.1. *Решением задачи Коши (1.1), (1.2) на отрезке* $[t_0 - T, t_0 + T]$ *называется функция* $y(t)$ *такая, что* $y(t)$ *непрерывно дифференцируема на* $[t_0 - T, t_0 + T]$, $A \leqslant y(t) \leqslant B$ *для* $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $y(t)$ *удовлетворяет (1.1), (1.2).*

Решение задачи Коши (1.1), (1.2) зависит от функции $f(t, y)$ и начального состояния y_0, которые можно называть *исходными данными* задачи Коши (1.1), (1.2). Как зависит решение этой задачи от изменения исходных данных, то есть функции $f(t, y)$ и начального состояния y_0? Покажем, что небольшие изменения исходных данных приводят к небольшим изменениям решения задачи Коши. Таким образом, можно говорить о непрерывной зависимости решения задачи Коши от исходных данных.

1.1.1. Непрерывная зависимость от исходных данных

Теорема 1.1.1. *Пусть функции* $f_1(t, y)$ *и* $f_2(t, y)$ *непрерывны в прямоугольнике* Q *и* $f_1(t, y)$ *удовлетворяет в* Q *условию Липшица по* y, *то есть существует константа $L > 0$ такая, что*

$$|f_1(t,y) - f_1(t,\widetilde{y})| \leqslant L|y - \widetilde{y}|, \quad \forall (t,y),(t,\widetilde{y}) \in Q.$$

Тогда, если функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ являются решениями задач Коши

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t)), \\ y_1(t_0) = y_{01}, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2'(t) = f_2(t, y_2(t)), \\ y_2(t_0) = y_{02}, \end{cases}$$

то имеет место неравенство

$$\max_{t\in[t_0-T,t_0+T]} |y_1(t) - y_2(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \left(|y_{01} - y_{02}| + T \max_{(t,y)\in Q} |f_1(t,y) - f_2(t,y)| \right) \exp\{LT\}. \quad (1.3)$$

Доказательство. Из леммы об эквивалентности задачи Коши интегральному уравнению следует, что функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ являются решениями интегральных уравнений

$$y_1(t) = y_{01} + \int\limits_{t_0}^{t} f_1(\tau, y_1(\tau))d\tau, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T],$$

$$y_2(t) = y_{02} + \int\limits_{t_0}^{t} f_2(\tau, y_2(\tau))d\tau, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

Вычитая второе уравнение из первого и оценивая по модулю, имеем

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leqslant |y_{01} - y_{02}| + \left| \int\limits_{t_0}^{t} \big(f_1(\tau, y_1(\tau)) - f_2(\tau, y_2(\tau))\big)d\tau \right|.$$

Вычитая и прибавляя под знаком интеграла $f_1(\tau, y_2(\tau))$, получим

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leqslant |y_{01} - y_{02}| + \left| \int\limits_{t_0}^{t} \big|f_1(\tau, y_1(\tau)) - f_1(\tau, y_2(\tau))\big|d\tau \right| +$$
$$+ \left| \int\limits_{t_0}^{t} \big|f_1(\tau, y_2(\tau)) - f_2(\tau, y_2(\tau))\big|d\tau \right|, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T]. \quad (1.4)$$

Учитывая то, что функция $f_1(t,y)$ удовлетворяет условию Липшица, а также оценку

$$\left|\int\limits_{t_0}^{t} \big|f_1(\tau, y_2(\tau)) - f_2(\tau, y_2(\tau))\big| d\tau\right| \leqslant T \max_{(t,y)\in Q} |f_1(t,y) - f_2(t,y)|,$$

справедливую для всех $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, неравенство (1.4) можно переписать так:

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leqslant \big(|y_{01} - y_{02}| + T \max_{(t,y)\in Q} |f_1(t,y) - f_2(t,y)|\big) + \\ + L \left|\int\limits_{t_0}^{t} \big|y_1(\tau) - y_2(\tau)\big| d\tau\right|, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

Применив к функции $|y_1(t) - y_2(t)|$ лемму Гронуолла-Беллмана **??**, при $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ получим неравенство

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leqslant \big(|y_{01} - y_{02}| + T \max_{(t,y)\in Q} |f_1(t,y) - f_2(t,y)|\big) \exp\{L|t - t_0|\},$$

из которого следует оценка (1.3). Теорема 1.1.1 доказана. $\square$

1.1.2. Теорема сравнения

Рассмотрим теперь вопрос о том, при каких условиях решение одной задачи Коши будет больше или равно решению другой задачи Коши. Теоремы такого типа часто называют теоремами сравнения.

Рассмотрим прямоугольник

$$Q_+ = \{(t,y): \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T, \quad A \leqslant y \leqslant B\}.$$

Далее мы используем следующее простое утверждение из математического анализа, представляющее собой формулу конечных приращений в интегральном виде.

Лемма 1.1.1. *Пусть функция $f(t,y)$ непрерывна в Q_+ и имеет в Q_+ непрерывную частную производную $f_y(t,y)$. Тогда для любых (t,y_1), $(t,y_2) \in Q_+$ справедливо равенство*

$$f(t,y_1) - f(t,y_2) = \int\limits_0^1 f_y(t, y_2 + \theta(y_1 - y_2)) d\theta \, (y_1 - y_2). \qquad (1.5)$$

Докажем теперь теорему о сравнении решений двух задач Коши, которую также часто называют *неравенством Чаплыгина.*

Теорема 1.1.2. *(Теорема сравнения) Пусть функции* $f_1(t,y)$, $f_2(t,y)$ *непрерывны в* Q_+ *и* $f_1(t,y)$ *имеет в* Q_+ *непрерывную частную производную* $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(t,y)$. *Тогда, если функции* $y_1(t)$, $y_2(t)$ *на отрезке* $[t_0, t_0+T]$ *являются решениями задач Коши*

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t)), \\ y_1(t_0) = y_{01}, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2'(t) = f_2(t, y_2(t)), \\ y_2(t_0) = y_{02}, \end{cases}$$

причем

$$f_1(t,y) \geqslant f_2(t,y), \quad (t,y) \in Q_+, \qquad y_{01} \geqslant y_{02},$$

то справедливо неравенство

$$y_1(t) \geqslant y_2(t), \quad t \in [t_0, t_0+T].$$

Доказательство. Так как функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ на отрезке $[t_0, t_0+T]$ являются решениями соответствующих уравнений, то они непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_0, t_0+T]$, $A \leqslant y_i(t) \leqslant B$, $i = 1, 2$, и справедливо равенство

$$y_1'(t) - y_2'(t) = f_1(t, y_1(t)) - f_2(t, y_2(t)), \quad t \in [t_0, t_0+T]. \tag{1.6}$$

Преобразуем правую часть этого равенства, используя формулу конечных приращений (1.5),

$$\begin{gathered} f_1(t, y_1(t)) - f_2(t, y_2(t)) = \\ = f_1(t, y_1(t)) - f_1(t, y_2(t)) + f_1(t, y_2(t)) - f_2(t, y_2(t)) = \\ = \int_0^1 \frac{\partial f_1}{\partial y}\big(t, y_2(t) + \theta(y_1(t) - y_2(t))\big)d\theta\big(y_1(t) - y_2(t)\big) + \\ + f_1(t, y_2(t)) - f_2(t, y_2(t)). \end{gathered}$$

Введем обозначения

$$\begin{gathered} v(t) = y_1(t) - y_2(t), \\ p(t) = \int_0^1 \frac{\partial f_1}{\partial y}\big(t, y_2(t) + \theta(y_1(t) - y_2(t))\big)d\theta, \\ h(t) = f_1(t, y_2(t)) - f_2(t, y_2(t)). \end{gathered}$$

Тогда $f_1(t, y_1(t)) - f_2(t, y_2(t)) = p(t)v(t) + h(t)$, и равенство (1.6) можно переписать так:

$$v'(t) = p(t)v(t) + h(t), \quad t \in [t_0, t_0 + T].$$

Решение этого линейного дифференциального уравнения первого порядка с начальным условием $v(t_0) = y_{01} - y_{02}$ имеет вид

$$v(t) = (y_{01} - y_{02}) \exp\Big\{ \int\limits_{t_0}^{t} p(\xi) d\xi \Big\} + \int\limits_{t_0}^{t} \exp\Big\{ \int\limits_{\tau}^{t} p(\xi) d\xi \Big\} h(\tau) d\tau, \ t \in [t_0, t_0 + T].$$

Так как из условий теоремы следует, что

$$y_{01} - y_{02} \geqslant 0, \quad h(t) \geqslant 0, \quad t \in [t_0, t_0 + T],$$

то

$$v(t) = y_1(t) - y_2(t) \geqslant 0, \quad t \in [t_0, t_0 + T],$$

и теорема 1.1.2 доказана. $\square$

2. Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от метра в начальном условии и правой части.

В этом параграфе мы рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной, в которой правая часть уравнения и начальное условие зависят от параметра μ, и выясним при каких условиях решение этой задачи Коши будет непрерывно и дифференцируемо по параметру.

Обозначим

$$Q_\mu = \{(t, y, \mu): \quad |t - t_0| \leqslant T, \quad A \leqslant y \leqslant B, \quad \mu_1 \leqslant \mu \leqslant \mu_2\}.$$

Пусть функция $f(t, y, \mu)$ определена на множестве Q_μ, а функция $y_0(\mu)$ определена на отрезке $[\mu_1, \mu_2]$.

Рассмотрим задачу Коши

$$y'(t) = f(t, y(t), \mu), \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T], \tag{1.7}$$

$$y(t_0) = y_0(\mu). \tag{1.8}$$

Так как при различных значениях параметра μ мы будем получать различные решения задачи Коши (1.7), (1.8), то, очевидно, что решение этой задачи зависит не только от переменной t, но и от параметра μ. В связи с этим далее решение задачи Коши (1.7), (1.8) мы будем обозначать $y(t, \mu)$. При каких условиях решение задачи Коши $y(t, \mu)$ будет непрерывно по параметру μ ?

1.2.1. Непрерывная зависимость решения задачи Коши от параметра

Теорема 1.2.1. *Пусть функция $f(t, y, \mu)$ непрерывна в Q_μ и удовлетворяет в Q_μ условию Липшица по y, то есть*

$$|f(t, y_1, \mu) - f(t, y_2, \mu)| \leqslant L|y_1 - y_2|, \quad \forall (t, y_1, \mu), (t, y_2, \mu) \in Q_\mu,$$

а функция $y_0(\mu)$ непрерывна на отрезке $[\mu_1, \mu_2]$.

Тогда, если $y(t, \mu)$ – решение задачи Коши (1.7), (1.8) на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ для всех $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$, то функция $y(t, \mu)$ непрерывна по μ при $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$.

Доказательство. По условию решение задачи Коши $y(t, \mu)$ существует для всех $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ и $A \leqslant y(t, \mu) \leqslant B$ для всех $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$. Пусть μ_0 и $\mu_0 + \Delta\mu$ две произвольные точки отрезка $[\mu_1, \mu_2]$. Рассмотрим решения задачи Коши $y(t, \mu_0)$ и $y(t, \mu_0 + \Delta\mu)$, соответствующие этим значениям параметров. Введем обозначения

$$\begin{aligned} y_1(t) = y(t, \mu_0), &\quad y_2(t) = y(t, \mu_0 + \Delta\mu), \\ f_1(t, y) = f(t, y, \mu_0), &\quad f_2(t, y) = f(t, y, \mu_0 + \Delta\mu), \\ y_{01} = y_0(\mu_0), &\quad y_{02} = y_0(\mu_0 + \Delta\mu). \end{aligned}$$

Для функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$ выполнены условия теоремы 1.1.1 о непрерывной зависимости решения задачи Коши от исходных данных. Применяя эту теорему, получим

$$\max_{t\in[t_0-T,t_0+T]} |y(t,\mu_0)-y(t,\mu_0+\Delta\mu)| = \max_{t\in[t_0-T,t_0+T]} |y_1(t)-y_2(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \Big(|y_{01}-y_{02}| + T\max_{(t,y)\in Q}|f_1(t,y)-f_2(t,y)|\Big)\exp\{LT\} =$$
$$= \Big(|y_0(\mu_0)-y_0(\mu_0+\Delta\mu)|+$$
$$+T\max_{(t,y)\in Q}|f(t,y,\mu_0)-f(t,y,\mu_0+\Delta\mu)|\Big)\exp\{LT\}, \quad (1.9)$$

где $Q=\{(t,y) : |t-t_0|\leqslant T, \quad A\leqslant y\leqslant B\}$.

Покажем, что из неравенства (1.9) следует непрерывность функции $y(t,\mu)$ в точке μ_0. Пусть ε – произвольное положительное число. Покажем, что найдется $\delta(\varepsilon)$ такое, что для всех $t\in[t_0-T,t_0+T]$

$$|y(t,\mu_0+\Delta\mu)-y(t,\mu_0)|\leqslant\varepsilon \qquad (1.10)$$

при $|\Delta\mu|\leqslant\delta(\varepsilon)$.

Так как непрерывная на отрезке $[\mu_1,\mu_2]$ функция $y_0(\mu)$ равномерно непрерывна на этом отрезке, то существует $\delta_1(\varepsilon)$ такое, что

$$|y_0(\mu_0+\Delta\mu)-y_0(\mu_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2\exp\{LT\}} \qquad (1.11)$$

при $|\Delta\mu|\leqslant\delta_1(\varepsilon)$.

Так как непрерывная на ограниченном замкнутом множестве Q_μ функция $f(t,y,\mu)$ равномерно непрерывна на этом множестве, то существует $\delta_2(\varepsilon)$ такое, что для любых $t\in[t_0-T,t_0+T]$ и $y\in[A,B]$

$$|f(t,y,\mu_0+\Delta\mu)-f(t,y,\mu_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2T\exp\{LT\}} \qquad (1.12)$$

при $|\Delta\mu|\leqslant\delta_2(\varepsilon)$.

Из неравенств (1.9), (1.11) и (1.12) следует, что при $|\Delta\mu|\leqslant\delta(\varepsilon)=\min\{\delta_1(\varepsilon),\delta_2(\varepsilon)\}$ справедливо неравенство (1.10), которое означает непрерывность функции $y(t,\mu)$ по μ. Теорема 1.2.1 доказана. □

Замечание 1.2.1. *В теореме 1.2.1 фактически доказана равномерная на множестве $[t_0-T,t_0+T]\times[\mu_1,\mu_2]$ непрерывность решения задачи Коши по параметру μ. Отсюда нетрудно показать, что функция $y(t,\mu)$ непрерывна по совокупности переменных (t,μ) на множестве $[t_0-T,t_0+T]\times[\mu_1,\mu_2]$.*

3. Теорема о дифференцируемости по параметру решения задачи Коши.

Покажем теперь, что при определенных условиях, решение $y(t,\mu)$ задачи Коши (1.7), (1.8) будет дифференцируемым по параметру μ.

Теорема 1.2.2. *Пусть функция $f(t,y,\mu)$ непрерывна в Q_μ и имеет в Q_μ непрерывные частные производные $f_y(t,y,\mu)$, $f_\mu(t,y,\mu)$, а функция $y_0(\mu)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\mu_1,\mu_2]$.*

Тогда, если $y(t,\mu)$ – решение задачи Коши (1.7), (1.8) на отрезке $[t_0-T,t_0+T]$ для всех $\mu\in[\mu_1,\mu_2]$, то функция $y(t,\mu)$ имеет при $t\in[t_0-T,t_0+T]$, $\mu\in[\mu_1,\mu_2]$ производную по μ.

Доказательство. По условию решение задачи Коши $y(t,\mu)$ существует для всех $t\in[t_0-T,t_0+T]$, $\mu\in[\mu_1,\mu_2]$ и $A\leqslant y(t,\mu)\leqslant B$ для всех $t\in[t_0-T,t_0+T]$, $\mu\in[\mu_1,\mu_2]$. Пусть μ и $\mu+\Delta\mu$ две произвольные точки отрезка $[\mu_1,\mu_2]$. Рассмотрим соответствующие этим параметрам решения задачи Коши $y(t,\mu)$ и $y(t,\mu+\Delta\mu)$. Определим функцию

$$v(t,\mu,\Delta\mu)=\frac{y(t,\mu+\Delta\mu)-y(t,\mu)}{\Delta\mu},\quad t\in[t_0-T,t_0+T].$$

Так как функции $y(t,\mu+\Delta\mu)$, $y(t,\mu)$ являются решениями уравнения (1.7) на отрезке $[t_0-T,t_0+T]$ при соответствующих значениях параметров, то

$$v'(t,\mu,\Delta\mu)=\frac{f(t,y(t,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu)-f(t,y(t,\mu),\mu)}{\Delta\mu}. \qquad (1.13)$$

Преобразуем выражение, стоящее в правой части этого равенства

$$\frac{f(t,y(t,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu)-f(t,y(t,\mu),\mu)}{\Delta\mu}=$$
$$=\frac{f(t,y(t,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu)-f(t,y(t,\mu),\mu+\Delta\mu)}{\Delta\mu}+$$
$$+\frac{f(t,y(t,\mu),\mu+\Delta\mu)-f(t,y(t,\mu),\mu)}{\Delta\mu}.$$

Применяя формулу конечных приращений (1.5), получим

$$\frac{f(t, y(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, y(t, \mu), \mu + \Delta\mu)}{\Delta\mu} =$$

$$= \int\limits_0^1 f_y(t, y(t, \mu) + \theta(y(t, \mu + \Delta\mu) - y(t, \mu)), \mu + \Delta\mu) d\theta \cdot \frac{y(t, \mu + \Delta\mu) - y(t, \mu)}{\Delta\mu}.$$

Введем функции

$$p(t, \mu, \Delta\mu) = \int\limits_0^1 f_y(t, y(t, \mu) + \theta(y(t, \mu + \Delta\mu) - y(t, \mu)), \mu + \Delta\mu) d\theta,$$

$$q(t, \mu, \Delta\mu) = \frac{f(t, y(t, \mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, y(t, \mu), \mu)}{\Delta\mu}.$$

Учитывая сделанные обозначения, имеем

$$\frac{f(t, y(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, y(t, \mu), \mu)}{\Delta\mu} =$$
$$= p(t, \mu, \Delta\mu) v(t, \mu, \Delta\mu) + q(t, \mu, \Delta\mu).$$

Подставляя это равенство в правую часть (1.13), получим, что функция $v(t, \mu, \mu + \Delta\mu)$ является решением линейного дифференциального уравнения первого порядка на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$:

$$v'(t, \mu, \Delta\mu) = p(t, \mu, \Delta\mu) v(t, \mu, \Delta\mu) + q(t, \mu, \Delta\mu). \tag{1.14}$$

Из определения $v(t, \mu, \Delta\mu)$ следует, что она удовлетворяет начальному условию

$$v(t_0, \mu, \Delta\mu) = \frac{y_0(\mu + \Delta\mu) - y_0(\mu)}{\Delta\mu}. \tag{1.15}$$

Решение задачи Коши (1.14), (1.15) имеет вид

$$v(t,\mu,\Delta\mu) = \frac{y_0(\mu+\Delta\mu)-y_0(\mu)}{\Delta\mu}\exp\Big\{\int\limits_{t_0}^{t} p(\xi,\mu,\Delta\mu)d\xi\Big\}+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t} q(\tau,\mu,\Delta\mu)\exp\Big\{\int\limits_{\tau}^{t} p(\xi,\mu,\Delta\mu)d\xi\Big\}d\tau, \quad t\in[t_0-T,t_0+T]. \quad (1.16)$$

Для доказательства существования производной $\dfrac{\partial y}{\partial \mu}(t,\mu)$ достаточно доказать, что функция $v(t,\mu,\Delta\mu)$ имеет предел при $\Delta\mu\to 0$. Покажем, что существует предел правой части формулы (1.16) при $\Delta\mu\to 0$.

Так как функция $y_0(\mu)$ непрерывно дифференцируема, то

$$\lim_{\Delta\mu\longrightarrow 0}\frac{y_0(\mu+\Delta\mu)-y_0(\mu)}{\Delta\mu} = \frac{dy_0}{d\mu}(\mu).$$

Найдем предел функции $p(t,\mu,\Delta\mu)$ при $\Delta\mu\to 0$. Из непрерывности в Q_μ частной производной $f_y(t,y,\mu)$ и определения функции $p(t,\mu,\Delta\mu)$ следует, что

$$\lim_{\Delta\mu\to 0} p(t,\mu,\Delta\mu) = \frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t,\mu),\mu)$$

равномерно по $(t,\mu)\in[t_0-T,t_0+T]\times[\mu_1,\mu_2]$. Из существования частной производной $f_\mu(t,y,\mu)$ имеем

$$\lim_{\Delta\mu\to 0} q(t,\mu,\Delta\mu) = \frac{\partial f}{\partial \mu}(t,y(t,\mu),\mu)$$

равномерно по $(t,\mu)\in[t_0-T,t_0+T]\times[\mu_1,\mu_2]$. Следовательно, предел правой части формулы (1.16) существует, и переходя в этой формуле к пределу при $\Delta\mu\to 0$, получим

$$\frac{\partial y}{\partial \mu}(t,\mu) = \lim_{\Delta\mu\to 0} v(t,\mu,\Delta\mu) = \frac{dy_0}{d\mu}(\mu)\exp\Big\{\int\limits_{t_0}^{t} f_y(\xi,y(\xi,\mu),\mu)d\xi\Big\}+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t} f_\mu(\tau,y(\tau,\mu),\mu)\exp\Big\{\int\limits_{\tau}^{t} f_y(\xi,y(\xi,\mu),\mu)d\xi\Big\}d\tau. \quad (1.17)$$

Теорема 1.2.2 доказана. □

4. Основные понятия теории устойчивости по Ляпунову. Теорема об асимптотической устойчивости нулевого решения линейной однородной системы ОДУ с постоянными коэффициентами.

В теории устойчивости изучается вопрос о зависимости решения задачи Коши для дифференциального уравнения или системы от заданных при $t = t_0$ начальных данных на бесконечном промежутке изменения независимой переменной $t \in [t_0; +\infty)$. Далее без ограничения общности полагаем $t_0 = 0$.

Пример 2.1.1. *Исследовать зависимость решения задачи Коши*

$$y' = ay, \quad y(0) = y_0$$

от начального состояния y_0 при $t \in [0; +\infty)$, где $a \in \mathbb{R}$ – параметр.

Решение задачи Коши находится по формуле $y(t; y_0) = y_0 \exp\{at\}$ (см. рис. 2.1).

Для $a < 0$ имеем

$$|y(t; y_0) - y(t; \widetilde{y}_0)| = |y_0 - \widetilde{y}_0| \exp\{at\} \leqslant |y_0 - \widetilde{y}_0| \to 0$$

при $y_0 - \widetilde{y}_0 \to 0$ равномерно по $t \geqslant 0$, причем $|y(t; y_0) - y(t; \widetilde{y}_0)| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Для $a = 0$ имеем

$$|y(t; y_0) - y(t; \widetilde{y}_0)| = |y_0 - \widetilde{y}_0| \to 0$$

при $y_0 - \widetilde{y}_0 \to 0$ равномерно по $t \geqslant 0$, но $|y(t; y_0) - y(t; \widetilde{y}_0)| \nrightarrow 0$ при $t \to +\infty$.

Для $a > 0$ имеем

$$|y(t; y_0) - y(t; \widetilde{y}_0)| = |y_0 - \widetilde{y}_0| \exp\{at\} \to +\infty, \ t \to +\infty,$$

то есть траектории неограниченно расходятся как бы близки они ни были в начальный момент времени.

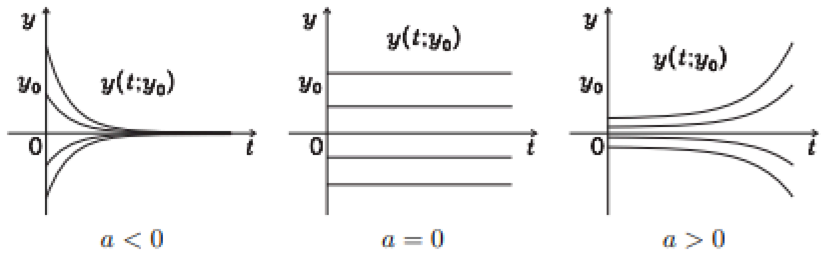


Рис. 2.1. К примеру 2.1.1: вид интегральных кривых решения задачи Коши $y(t; y_0) = y_0 \exp\{at\}$ в зависимости от a.

В тоже время для любого конечного $T > 0$ имеет место непрерывная зависимость от начальных данных на всем отрезке $[0, T]$:

$$\max_{t \in [0,T]} |y(t; y_0) - y(t; \widetilde{y}_0)| \leqslant |y_0 - \widetilde{y}_0| \exp\{|a|T\} \to 0$$

при $y_0 - \widetilde{y}_0 \to 0$. Таким образом, при определении устойчивости на бесконечном промежутке времени необходимо более точно учитывать особенности поведения решений на всей полупрямой $t \geqslant 0$.

2.1.1. Основные понятия теории устойчивости

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка относительно искомой вектор функции $\overline{y}(t) = (y_1(t), y_1(t), \ldots, y_n(t))^\top$

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = \overline{f}(t, \overline{y}(t)), \qquad (2.1)$$

$$\overline{y}(t_0) = \overline{y}_0, \qquad (2.2)$$

где

$$\overline{f}(t, \overline{y}) = (f_1(t, \overline{y}), f_2(t, \overline{y}), \ldots, f_n(t, \overline{y}))^\top, \quad \overline{y}_0 = (y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})^\top.$$

Предполагается, что $f_i(t, \overline{y})$ определены и непрерывны вместе с частными производными $\partial f_i(t, \overline{y})/\partial y_j$ на множестве

$$\Pi = [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$$

для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда по теореме **??** о существовании и единственности решения задачи Коши для любых начальных данных $\overline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ система (2.1), (2.2) имеет на некотором отрезке $[0, T]$ единственное решение $\overline{y}(t; \overline{y}_0)$, в обозначении которого отражена зависимость от начального состояния $\overline{y}_0$. Если же в начальном условии (2.2) берутся начальные данные $\widetilde{y}_0$, то соответствующее решение обозначается как $\overline{y}(t; \widetilde{y}_0)$. Всюду ниже $\|\overline{y}\| = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j^2\right)^{1/2}$ обозначает евклидову норму вектора $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$.

Определение 2.1.1. *Решение $\overline{y}(t; \overline{y}_0)$ задачи Коши (2.1), (2.2) называется* ***устойчивым по Ляпунову****, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon, \overline{y}_0) > 0$ такое, что для любых начальных данных $\widetilde{y}_0$, удовлетворяющих условию $\|\widetilde{y}_0 - \overline{y}_0\| < \delta(\varepsilon, \overline{y}_0)$, соответствующие решения $\overline{y}(t; \widetilde{y}_0)$ задачи Коши для системы (2.1) существуют для всех $t \geqslant 0$ и удовлетворяют неравенству*

$$\|\overline{y}(t; \widetilde{y}_0) - \overline{y}(t; \overline{y}_0)\| < \varepsilon, \quad \forall\, t \in [0, +\infty). \tag{2.3}$$

В противном случае решение $\overline{y}(t; \overline{y}_0)$ называется неустойчивым по Ляпунову.

Заметим, что неравенство (2.3) должно быть выполнено сразу для всех $t \geqslant 0$, поэтому вместо (2.3) можно использовать также неравенство

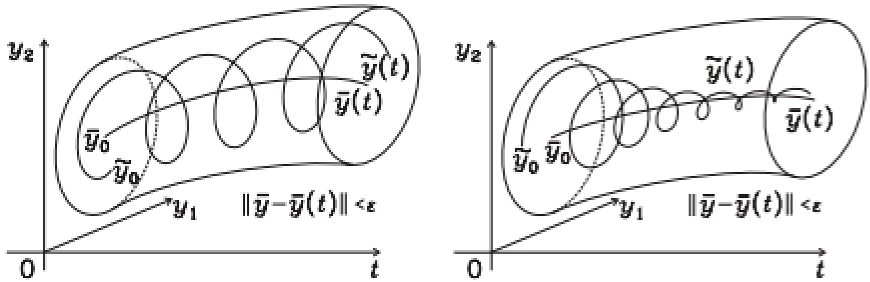
$$\sup_{t \geqslant 0} \|\overline{y}(t; \widetilde{y}_0) - \overline{y}(t; \overline{y}_0)\| < \varepsilon.$$

Определение 2.1.2. *Решение $\overline{y}(t; \overline{y}_0)$ задачи Коши (2.1), (2.2) называется* ***асимптотически устойчивым****, если оно устойчиво по Ляпунову и существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любых начальных данных $\widetilde{y}_0$, удовлетворяющих условию $\|\widetilde{y}_0 - \overline{y}_0\| < \delta_0$, существует предел*

$$\lim_{t \to +\infty} \|\overline{y}(t; \widetilde{y}_0) - \overline{y}(t; \overline{y}_0)\| = 0. \tag{2.4}$$

Введенные понятия устойчивости и асимптотической устойчивости иллюстрируются на рис. 2.2.

Пример 2.1.2. *В примере 2.1.1 решение $y(t; y_0) = y_0 \exp\{at\}$ асимптотически устойчиво при $a < 0$, устойчиво (не асимптотически) при $a = 0$, неустойчиво – при $a > 0$.*



а. б.

Рис. 2.2. К определениям устойчивости и асимптотической устойчивости решения $\overline{y}(t) = \overline{y}(t;\overline{y}_0)$:
а. в случае устойчивости интегральная кривая решения $\widetilde{y}(t) = \overline{y}(t;\widetilde{y}_0)$ находится в ε-трубке интегральной кривой решения $\overline{y}(t)$ ($\|\overline{y} - \overline{y}(t)\| < \varepsilon$, $t \geqslant 0$);
б. в случае асимптотической устойчивости дополнительно $\|\widetilde{y}(t) - \overline{y}(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$.

2.1.2. Редукция к задаче устойчивости нулевого решения

В случае $\overline{f}(t,0,\ldots,0) = \overline{\theta}$, $\overline{y}_0 = \overline{\theta}$ задача Коши (2.1), (2.2) имеет нулевое решение $\overline{\theta} = (0,\ldots,0)^\top$:

$$\overline{y}(t;\overline{\theta}) = \overline{\theta}, \quad t \geqslant 0.$$

Переформулируем определения устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости для этого важного для дальнейшего изложения случая.

Определение 2.1.3. *Нулевое решение $\overline{y}(t;\overline{\theta}) = \overline{\theta}$ задачи Коши (2.1), (2.2) называется* ***устойчивым по Ляпунову****, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых начальных данных $\widetilde{y}_0$, удовлетворяющих условию $\|\widetilde{y}_0\| < \delta(\varepsilon)$, соответствующие решения $\overline{y}(t;\widetilde{y}_0)$ задачи Коши для системы (2.1) существуют для всех $t \geqslant 0$ и*

$$\|\overline{y}(t;\widetilde{y}_0)\| < \varepsilon, \quad \forall\, t \in [0,+\infty). \tag{2.5}$$

В противном случае нулевое решение называется неустойчивым по Ляпунову.

Определение 2.1.4. *Нулевое решение $\overline{y}(t) = \overline{\theta}$ задачи Коши (2.1), (2.2) называется* ***асимптотически устойчивым****, если оно устой-*

чиво по Ляпунову и существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любых начальных данных $\widetilde{y}_0$, удовлетворяющих условию $\|\widetilde{y}_0\| < \delta_0$, существует предел

$$\lim_{t\to+\infty} \|\overline{y}(t;\widetilde{y}_0)\| = 0. \tag{2.6}$$

Проблему устойчивости решения $\overline{y}(t;\overline{y}_0)$ задачи Коши (2.1), (2.2) можно свести к аналогичной проблеме для нулевого решения. Перейдем от системы (2.1) к новой системе, введя новые неизвестные

$$\overline{x}(t) = \overline{y}(t) - \overline{y}(t;\overline{y}_0).$$

Так как $\overline{y}(t)$ – решение (2.1), то для $\overline{x}(t)$ имеем

$$\frac{\overline{x}(t)}{dt} = \frac{\overline{y}(t)}{dt} - \frac{\overline{y}(t;\overline{y}_0)}{dt} = \overline{f}(t;\overline{y}(t)) - \overline{f}(t;\overline{y}(t;\overline{y}_0)) =$$
$$= \overline{f}(t;\overline{x}(t) + \overline{y}(t;\overline{y}_0)) - \overline{f}(t;\overline{y}(t;\overline{y}_0)).$$

Таким образом, вектор функция $\overline{x}(t)$ является решением системы

$$\frac{\overline{x}(t)}{dt} = \overline{f}(t;\overline{x}(t) + \overline{y}(t;\overline{y}_0)) - \overline{f}(t;\overline{y}(t;\overline{y}_0)).$$

Решение $\overline{x}(t;\overline{\theta})$ этой системы с нулевым начальным условием $\overline{x}(0) = \overline{\theta}$ равно нулю: $\overline{x}(t;\overline{\theta}) = \overline{\theta}$, $t \geqslant 0$. Это тривиальное решение соответствует решению $\overline{y}(t;\overline{y}_0)$ исходной системы. Принимая во внимание вышеизложенное, при анализе устойчивости, как правило, ограничиваются исследованием устойчивости нулевого решения.

2.2. Устойчивость нулевого решения линейной системы с постоянными коэффициентами

В данном параграфе рассматривается линейная однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными вещественными коэффициентами

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = A\overline{y},$$

где $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \ldots, n$. В зависимости от свойств матрицы A будут доказаны теоремы об устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения этой системы.

2.2.1. Вспомогательные утверждения

Лемма 2.2.1. *Пусть* $B(t) = (b_{ij}(t))$ *– функциональная матрица, элементы которой мажорируются одной и той же функцией* $b(t)$*:*

$$|b_{ij}(t)| \leqslant b(t), \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Если вектор-функции $\overline{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^\top$, $\overline{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))^\top$ *связаны соотношением* $\overline{y}(t) = B(t)\overline{x}(t)$, *то справедлива оценка*

$$\|\overline{y}(t)\| \leqslant nb(t)\|\overline{x}(t)\|.$$

Доказательство. Так как $y_j(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{jk}(t)x_k(t)$, то, оценивая модули компонент и применяя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$|y_j(t)| = \sum_{k=1}^{n} |b_{jk}(t)| \cdot |x_k(t)| \leqslant b(t) \sum_{k=1}^{n} |x_k(t)| \leqslant$$
$$\leqslant b(t) \left(\sum_{k=1}^{n} 1^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2(t) \right)^{1/2} = b(t)\sqrt{n}\|x(t)\|.$$

Возводя в квадрат обе части полученного неравенства и суммируя по $j = 1, \ldots, n$, приходим к утверждению леммы 2.2.1. □

Лемма 2.2.2. *Для любой непрерывной при* $t \geqslant 0$ *вектор-функции* $\overline{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))^\top$ *справедливо неравенство*

$$\left\| \int_0^t \overline{y}(\xi) d\xi \right\| \leqslant \sqrt{n} \int_0^t \|\overline{y}(\xi)\| d\xi.$$

Доказательство. По определению интеграла от вектор-функции имеем

$$\int_0^t \overline{y}(\xi) d\xi = (I_1(t), \ldots, I_n(t))^\top, \quad I_j(t) = \int_0^t y_j(\xi) d\xi, \quad j = 1, \ldots, n.$$

При $t \geqslant 0$ справедливы покомпонентные неравенства

$$|I_j(t)| = \left| \int_0^t y_j(\xi) d\xi \right| \leqslant \int_0^t |y_j(\xi)| d\xi \leqslant \int_0^t \|\overline{y}(\xi)\| d\xi.$$

Возводя в квадрат обе части полученного неравенства и суммируя по $j = 1, \ldots, n$, приходим к утверждению леммы 2.2.2 $\square$

Лемма 2.2.3. *Пусть $Y(t)$ – фундаментальная матрица линейной однородной системы $d\overline{y}/dt = A\overline{y}$ с постоянными коэффициентами $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \ldots, n$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ – собственные значения матрицы A с учетом кратностей, $p = \max\limits_{k=1,\ldots,n} \operatorname{Re} \lambda_k$.*

Тогда для матрицанта $Z(t,\tau) = Y(t)Y^{-1}(\tau)$ справедливы соотношения

1. *$Z(t,\tau) = Z(t-\tau, 0)$;*
2. *для любого $\gamma > 0$ найдется $C_\gamma > 0$ такое, что справедливо неравенство*

$$|Z_{ij}(t,\tau)| \leqslant C_\gamma \exp\{(p+\gamma)(t-\tau)\}, \quad \forall\, t \geqslant \tau.$$

Доказательство. Матрицант является решением матричной задачи Коши
$$\frac{dZ(t,\tau)}{dt} = AZ(t,\tau), \quad Z(\tau,\tau) = E.$$
Обозначим $s = t - \tau$, τ – фиксировано, и введем функцию
$$\widetilde{Z}(s) = Z(\tau + s, \tau).$$
Очевидно, что
$$\frac{d\widetilde{Z}(s)}{ds} = A\widetilde{Z}(s), \quad \widetilde{Z}(0) = E.$$
Но тогда в силу единственности решения матричной задачи Коши справедливо равенство $\widetilde{Z}(s) = Z(s, 0)$. Возвращаясь к переменной t, получаем $Z(t,\tau) = Z(t-\tau, 0)$.

Оценим компоненты матрицы $Z(s,0) = Y(s)Y^{-1}(0)$. Так как столбцы фундаментальной матрицы состоят из вектор-функций фундаментальной системы решений, то компоненты матрицанта $Z(s,0)$ имеют вид (см. теорему **??**):

$$Z_{ij}(s,0) = q_{ij}(s) \exp\{\lambda_k s\}, \tag{2.7}$$

где λ_k – одно из собственных значений, а $q_{ij}(s)$ – многочлен степени $\deg q_{ij}(s) \leqslant n-1$. Для любого $\gamma > 0$ найдутся постоянные $C_{ij} > 0$ такие, что выполнены неравенства

$$|q_{ij}(s)| \leqslant C_{ij} \exp\{\gamma s\}, \quad \forall\, s \geqslant 0.$$

Так как $p = \max\limits_{k=1,\ldots,n} \mathrm{Re}\lambda_k$, то

$$|\exp\{\lambda_k s\}| = \exp\{\,\mathrm{Re}\,\lambda_k s\} \leqslant \exp\{ps\}.$$

Учитывая эти неравенства, из (2.7) получаем

$$|Z_{ij}(s,0)| \leqslant |q_{ij}(s)| \cdot |\exp\{\lambda_k s\}| \leqslant C_\gamma \exp\{(p+\gamma)s\}, \quad C_\gamma = \max_{i,j=1,\ldots,n} C_{ij}.$$

Полагая $s = t - \tau$, убеждается в справедливости второго утверждения леммы 2.2.3. $\square$

2.2.2. Теорема об асимптотической устойчивости нулевого решения линейной системы с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейную однородную систему с постоянными вещественными коэффициентами:

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = A\overline{y}, \tag{2.8}$$

где $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i,j = 1,\ldots,n$. Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ – собственные значения матрицы A с учетом их кратностей.

Теорема 2.2.1. *Пусть вещественные части всех собственных значений матрицы A отрицательны:*

$$\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0, \qquad \forall\, k = 1,\ldots,n.$$

Тогда нулевое решение $\overline{y}(t;\overline{\theta}) = \overline{\theta}$ системы (2.8) является асимптотически устойчивым.

Доказательство. Пусть $\overline{y}(t) = \overline{y}(t;\overline{y}_0)$ – решение задачи Коши

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = A\overline{y}, \quad \overline{y}(0) = \overline{y}_0.$$

Тогда, используя определение матрицанта, решение этой задачи можно представить в виде

$$\overline{y}(t) = Z(t,0)\overline{y}_0. \tag{2.9}$$

Обозначим $p = \max\limits_{k=1,\dots,n} \operatorname{Re} \lambda_k < 0$. Выберем и зафиксируем настолько малое $\gamma > 0$, чтобы

$$\alpha = p + \gamma < 0.$$

Тогда согласно части 2 леммы 2.2.3 найдется константа C_γ такая, что справедлива оценка

$$|Z_{ij}(t,0)| \leqslant C_\gamma \exp\{\alpha t\}, \quad t \geqslant 0.$$

В силу леммы 2.2.1 с $B(t) = Z(t,0)$, $b(t) = C_\gamma \exp\{\alpha t\}$ и $\overline{x}(t) = \overline{y}_0$ из (2.9) следует оценка

$$\|\overline{y}(t)\| \leqslant nC_\gamma \exp\{\alpha t\} \|\overline{y}_0\|.$$

Если положить $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2nC_\gamma}$, то из неравенства $\|\overline{y}_0\| < \delta(\varepsilon)$ будет вытекать неравенство $\|\overline{y}(t)\| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant 0$. Асимптотическая устойчивость следует из предельного соотношения $\exp\{\alpha t\} \to 0$ при $t \to +\infty$. □

5. (!!!Первый пункт был в 4!!!)Теорема об устойчивости нулевого решения линейной однородной системы ОДУ с постоянными коэффициентами. Теорема о неустойчивости нулевого решения линейной однородной системы ОДУ с постоянными коэффициентами.

2.2.4. Теорема о неустойчивости нулевого решения линейной системы с постоянными коэффициентами

Теорема 2.2.3. *Пусть выполнено хотя бы одно из условий:*

1. *матрица A имеет собственное значение с положительной вещественной частью;*

2. *матрица A имеет собственное значение λ_m такое, что*

$$\mathrm{Re}\lambda_m = 0,$$

причем размерность собственного подпространства, отвечающего λ_m, меньше кратности этого собственного значения.

Тогда нулевое решение $\overline{y}(t;\overline{\theta}) = \overline{\theta}$ неустойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Пусть у матрицы A имеется собственное значение $\lambda = p + iq$, где $p > 0$, $q > 0$. Обозначим через $\overline{h} = \overline{h}_R + i\overline{h}_I$ соответствующий собственный вектор, где $\overline{h}_R$, $\overline{h}_I$ — линейно независимые векторы из $\mathbb{R}^n$. Без ограничения общности можем считать, что $\|\overline{h}\| = 1$. Вектор-функция

$$\overline{y}(t) = 0.5\delta \mathrm{Re}\,\overline{h}\exp\{(p+iq)t\} = \\ = 0.5\delta\exp\{pt\}\big(\overline{h}_R\cos qt - \overline{h}_I\sin qt\big), \quad \delta > 0, \quad (2.10)$$

является решение системы (2.8) как вещественная часть комплексного решения $\overline{h}\exp\{(p+iq)t\}$. В начальный момент $t = 0$ имеем

$$\overline{y}(0) = 0.5\delta\overline{h}_R, \quad \|\overline{y}(0)\| \leqslant 0.5\delta\|\overline{h}\| = 0.5\delta.$$

Для любого $\delta > 0$ из δ-окрестности нулевого решения стартует построенное в (2.10) решение $\overline{y}(t)$, для которого при $t = t_k = 2\pi k/q$, $k \in \mathbb{N}$, $k \to +\infty$ имеем:

$$\overline{y}(t_k) = 0.5\delta\overline{h}_R\exp\{2\pi kp/q\}, \quad \|\overline{y}(t_k)\| = 0.5\delta\|\overline{h}_R\|\exp\{2\pi kp/q\} \to +\infty.$$

Более простой случай $q = 0$ рассматривается аналогично.

Если у матрицы A имеется собственное значение $\lambda = iq$, $q > 0$, кратность которого превосходит размерность собственного подпространства, то для любого $\delta > 0$ существует решение системы (2.8) вида

$$\overline{y}(t) = 0.5\delta\mathrm{Re}\,(\overline{g} + t\overline{h})\exp\{iqt\} = \\ = 0.5\delta\big((\overline{g}_R + t\overline{h}_R)\cos qt - (\overline{g}_I + t\overline{h}_I)\sin qt\big), \quad \delta > 0, \\ \overline{y}(0) = 0.5\delta\mathrm{Re}\,\overline{g}, \quad \|\overline{y}(0)\| \leqslant 0.5\delta,$$

где $\overline{h} = \overline{h}_R + i\overline{h}_I$ – собственный вектор, $\overline{g} = \overline{g}_R + i\overline{g}_I$ – присоединенный вектор, $\|\overline{g}\| = 1$. Построенное решение $\overline{y}(t)$ стартует при $t = 0$ из δ-окрестности нулевого решения, а при $t = t_k = 2\pi k/q$, $k \in \mathbb{N}$, $k \to +\infty$ имеем:

$$\overline{y}(t_k) = 0.5\delta(\overline{g}_R + t_k\overline{h}_R), \quad \|\overline{y}(t_k)\| \sim k\|\overline{h}_R\| \to +\infty.$$

Более простой случай $q = 0$ рассматривается аналогично. $\square$

6. Теорема об исследовании устойчивости решения системы по первому приближению (формулировка). Примеры.

Рассмотрим автономную систему

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = \overline{f}(\overline{y}(t)), \tag{2.11}$$

где $\overline{f}(\overline{y}) = (f_1(\overline{y}), f_2(\overline{y}), \ldots, f_n(\overline{y}))^\top$. Предполагается, что

$$\overline{f}(\overline{\theta}) = \overline{\theta}.$$

Тогда система (2.11) имеет нулевое решение $\overline{y}(t) = \overline{\theta}$. Это решение далее исследуется на устойчивость.

В данном параграфе и ниже в параграфе 2.4 будем считать, что все решения, вышедшие при $t = 0$ из некоторой окрестности нулевого решения, определены при любых $t \geqslant 0$. Этот факт заведомо имеет место в случае, когда компоненты $f_j(\overline{y})$ правой части (2.11) удовлетворяют условию Липшица на всем пространстве $\mathbb{R}^n$ (см. теорему **??**). Возможны также и другие менее ограничительные случаи.

Пусть функции $f_j(\overline{y})$ дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности начала координат. Тогда имеет место представление

$$\overline{f}(\overline{y}) = A\overline{y} + \overline{R}(\overline{y}), \tag{2.12}$$

где

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(0, \ldots, 0)\right), \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad \overline{R}(\overline{y}) = \bar{o}(\|\overline{y}\|).$$

Напомним, что условие $\overline{R}(\overline{y}) = \bar{o}(\|\overline{y}\|)$ означает, что

$$\forall\, \sigma > 0 \quad \exists\, \rho > 0 : \ \|\overline{y}\| < \rho \ \Rightarrow \ \left\|\overline{R}(\overline{y})\right\| < \sigma\|\overline{y}\|. \tag{2.13}$$

Теорема 2.3.1. *Пусть функции $f_j(\overline{y})$ дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности начала координат, $j = 1, \ldots, n$.*

Если все собственные значения матрицы $A = \big(\partial f_i(0, \ldots, 0)/\partial y_j\big)$ имеют отрицательные вещественные части:

$$\operatorname{Re}\lambda_k < 0, \quad \forall\, k = 1, \ldots, n,$$

то нулевое решение системы (2.11) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Если же найдется хотя бы одно собственное значения матрицы $A = \big(\partial f_i(0, \ldots, 0)/\partial y_j\big)$ с положительной вещественной частью:

$$\exists \lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} : \operatorname{Re}\lambda > 0,$$

то нулевое решение неустойчиво по Ляпунову.

Пример 2.3.1. *Исследуем устойчивость решения $(0, 0)$ системы*

$$\begin{cases} dy_1/dt = -y_1 - ay_2 + y_2^4, \\ dy_2/dt = y_1 - y_1^5 + y_2^3. \end{cases}$$

Имеем $f_1(y_1, y_2) = -y_1 - ay_2 + y_2^4$, $f_2(y_1, y_2) = y_1 - y_1^5 + y_2^3$,

$$A = \left(\frac{\partial f_i(0,0)}{\partial y_j}\right) = \begin{pmatrix} -1 & -a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения собственных значений матрицы A составим характеристический многочлен

$$M(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} -1-\lambda & -a \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda + a.$$

Тогда собственные значения $\lambda_{1,2} = 0.5(-1 \pm \sqrt{1-4a})$.

При $a > 0$ имеем $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$. При $a = 0$ имеем $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$. При $a < 0$ имеем $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$. Таким образом, согласно первому методу Ляпунова, нулевое решение асимптотически устойчиво при $a > 0$, неустойчиво при $a < 0$. При $a = 0$ первый метод Ляпунова неприменим.

7. Исследование устойчивости решения системы на основе функций Ляпунова. Теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости.

2.4.1. Положительно определенные функции

Определение 2.4.1. *Функция* $V(\overline{y}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *называется положительно определенной на множестве* Ω *(* $\overline{\theta} \in \Omega$*), если выполнены следующие два условия:*

1. $V(\overline{y}) \geqslant 0$, $\forall\ \overline{y} \in \Omega$;
2. $V(\overline{y}) = 0 \Leftrightarrow \overline{y} = \overline{\theta}$.

Далее для определенности будем считать, что множество Ω является шаром радиуса $R > 0$ с центром в начале координат:

$$\Omega = \{\overline{y} \in \mathbb{R}^n : \|\overline{y}\| \leqslant R\}.$$

Лемма 2.4.1. *Пусть* $V(\overline{y})$ *– непрерывная и положительно определенная на* Ω *функция. Тогда:*

1. *для любого* $\varepsilon_1 > 0$ *существует* $\varepsilon_2 > 0$ *такое, что из условий* $\overline{y} \in \Omega$, $\|\overline{y}\| \geqslant \varepsilon_1$ *вытекает неравенство* $V(\overline{y}) \geqslant \varepsilon_2$*;*

2. для любого $\varepsilon_2 > 0$ существует $\varepsilon_3 > 0$ такое, что из условий $\overline{y} \in \Omega$, $V(\overline{y}) \geqslant \varepsilon_2$ вытекает неравенство $\|\overline{y}\| \geqslant \varepsilon_3$.

Доказательство. Проведем доказательство методом от противного.

1. Предположим, что первое из доказываемых утверждений неверно. Тогда существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon_2 > 0$ существует точка $\overline{y}$ такая, что $\varepsilon_1 \leqslant \|\overline{y}\| \leqslant R$ и $V(\overline{y}) < \varepsilon_2$. В силу произвольности ε_2 можно взять последовательность $0 < \varepsilon_{2k} \to 0$, и тогда найдется последовательность точек $\overline{y}_k$, для которой $\varepsilon_1 \leqslant \|\overline{y}_k\| \leqslant R$, $V(\overline{y}_k) \to 0$. Поскольку последовательность $\overline{y}_k$ принадлежит замкнутому ограниченному множеству, то некоторая ее подпоследовательность является сходящейся, $\overline{y}_{k_m} \to \widetilde{y}$, $\varepsilon_1 \leqslant \|\widetilde{y}\| \leqslant R$. В силу непрерывности $V(\overline{y}_{k_m}) \to V(\widetilde{y}) = 0$, откуда благодаря положительной определенности имеем $\widetilde{y} = \overline{\theta}$. Противоречие.

2. Предположим, что второе из доказываемых утверждений неверно. Аналогично проведенным выше рассуждениям существует $\varepsilon_2 > 0$ такое, что для некоторой последовательности $0 < \varepsilon_{3k} \to 0$ найдется последовательность точек $\overline{y}_k$, для которой $\|\overline{y}_k\| \leqslant \varepsilon_{3k}$, $V(\overline{y}_k) \geqslant \varepsilon_2$. В силу непрерывности имеем $V(\overline{y}_k) \to V(0) = 0$, что противоречит предыдущему неравенству. □

Геометрический смысл леммы состоит в том, что поверхность уровня функции $V(\overline{y}) = \varepsilon_2$ находится в шаровом слое, ограниченном изнутри сферой $\|\overline{y}\| = \varepsilon_3$ и снаружи – сферой $\|\overline{y}\| = \varepsilon_1$ (см. рис. 2.3).

Следствие 2.4.1. *Если последовательность точек $\overline{y}_k \in \Omega$, то при $k \to +\infty$*

$$\overline{y}_k \to \overline{\theta} \text{ тогда и только тогда, когда } V(\overline{y}_k) \to 0.$$

Если при $t \geqslant 0$ вектор-функция $\overline{y}(t) \in \Omega$, то при $t \to +\infty$

$$\overline{y}(t) \to \overline{\theta} \text{ тогда и только тогда, когда } V(\overline{y}(t)) \to 0.$$

Доказанные утверждения показывают, что непрерывная положительно определенная функция может использоваться в качестве меры близости точки $\overline{y} \in \mathbb{R}^n$ к началу координат. Ясно, что норма $V(\overline{y}) = \|\overline{y}\|$ является непрерывной положительно определенной функцией вектора $\overline{y}$. Приведем примеры положительно определенных функций, не являющихся нормами.

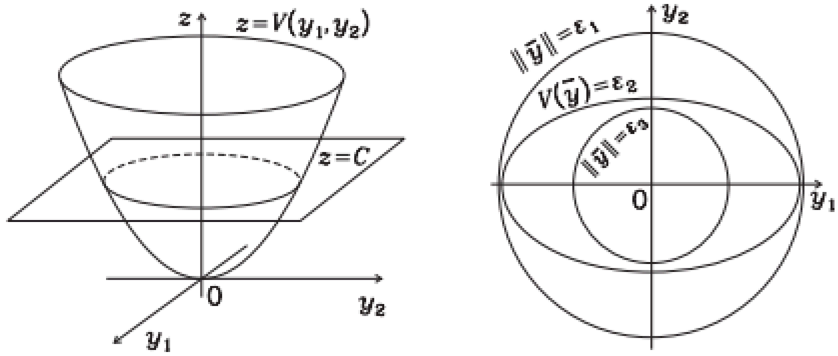


Рис. 2.3. Иллюстрация свойств положительно определенной функции $V(\overline{y})$, $\overline{y}=(y_1,y_2)$.

Пример 2.4.1. *Функция $V(y_1,y_2)=y_1^2+y_2^2$ является положительно определенной, но не удовлетворяет условию однородности для нормы. Вместе с тем, ее линиями уровня являются окружности.*

Пример 2.4.2. *Функция $V(y_1,y_2)=\sqrt{\dfrac{y_1^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}}$ $(a>0,\ b>0,\ a\neq b)$ является положительно определенной, но не удовлетворяет неравенству треугольника для нормы. Линиями уровня этой функции являются эллипсы с длинами полуосей, пропорциональными a, b.*

2.4.2. Функция Ляпунова

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt}=\overline{f}(t,\overline{y}(t)),\quad \overline{y}(0)=\overline{y}_0\in\Omega, \tag{2.19}$$

где $\overline{f}(t,\overline{y})=(f_1(t,y_1,\ldots,y_n),f_2(t,y_1,\ldots,y_n),\ldots,f_n(t,y_1,\ldots,y_n))^\top$, компоненты $f_j(t,y_1,\ldots,y_n)$ определены и непрерывны на множестве

$$[0;+\infty)\times\Omega,$$

причем

$$f_j(t,0,\ldots,0)=0,\quad j=1,\ldots,n,\quad t\geqslant 0.$$

Ясно, что система (2.19) имеет нулевое решение $\overline{y}(t;\overline{\theta})=\overline{\theta}$.

Определение 2.4.2. *Непрерывно дифференцируемая и положительно определенная на Ω функция $V(\overline{y})$ называется* ***функцией Ляпунова*** *системы (2.19), если*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\overline{y})}{\partial y_j} f_j(t, \overline{y}) \leqslant 0, \quad \forall \overline{y} \in \Omega,\, t \geqslant 0. \tag{2.20}$$

2.4.3. Теорема об устойчивости

Теорема 2.4.1. *Пусть на множестве Ω существует функция Ляпунова для системы (2.19). Тогда нулевое решение $\overline{y}(t; \overline{\theta}) = \overline{\theta}$ системы (2.19) является устойчивым по Ляпунову.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon_1 \in (0, R)$. В силу леммы 2.4.1 найдется $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon_1)$ такое, что как только для $\overline{y} \in \Omega$ выполнено неравенство $\|\overline{y}\| \geqslant \varepsilon_1$, то

$$V(\overline{y}) \geqslant \varepsilon_2. \tag{2.21}$$

В силу непрерывности функции $V(\overline{y})$ в нуле для $\varepsilon_2(\varepsilon_1)$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon_2(\varepsilon_1))$ такое, что из неравенства $\|\overline{y}\| < \delta$ вытекает оценка

$$V(\overline{y}) \leqslant \frac{\varepsilon_2}{2}. \tag{2.22}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\delta \leqslant \varepsilon_1$.

Рассмотрим произвольную начальную точку $\overline{y}_0$ из δ-окрестности нулевого решения ($\|\overline{y}_0\| < \delta$) и покажем, что при $t \geqslant 0$ соответствующее решение $\overline{y}(t) = \overline{y}(t; \overline{y}_0)$ системы (2.19) удовлетворяет неравенству

$$\|\overline{y}(t)\| < \varepsilon_1.$$

При $t = 0$ это неравенство выполнено, $\|\overline{y}(0)\| = \|\overline{y}_0\| < \delta \leqslant \varepsilon_1$, и в силу (2.22) имеем

$$V(\overline{y}(0)) \leqslant \frac{\varepsilon_2}{2}. \tag{2.23}$$

В силу непрерывности неравенство $\|\overline{y}(t)\| < \varepsilon_1$ остается справедливым на некотором полуинтервале $t \in [0; t_1)$. Если $t_1 = +\infty$, то устойчивость доказана. Если же для некоторого момента $t_1 \in (0, +\infty)$ окажется выполненным противоположное неравенство,

$$\|\overline{y}(t_1)\| \geqslant \varepsilon_1,$$

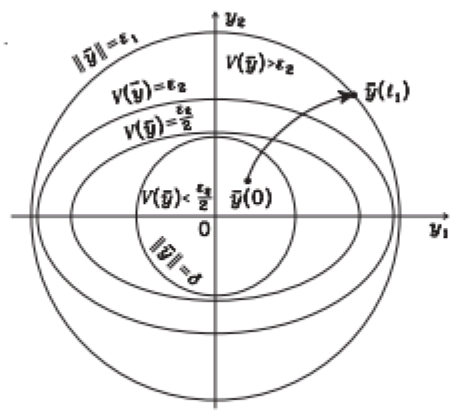


Рис. 2.4. К доказательству теоремы 2.4.1.

то в силу (2.21) получаем (см. рис. 2.4)

$$V(\overline{y}(t_1)) \geqslant \varepsilon_2.$$

Принимая во внимание неравенство (2.23), имеем

$$V(\overline{y}(t_1)) - V(\overline{y}(0)) \geqslant \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2}{2} = \frac{\varepsilon_2}{2} > 0. \tag{2.24}$$

С другой стороны, в силу (2.20)

$$\frac{dV(\overline{y}(t))}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\overline{y}(t))}{\partial y_j} \frac{dy_j(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\overline{y}(t))}{\partial y_j} f_j(t, \overline{y}(t)) \leqslant 0, \quad t \in [0, t_1].$$

Следовательно, функция $V(\overline{y}(t))$ не возрастает на отрезке $[0, t_1]$, что противоречит (2.24).

Таким образом, по произвольному $\varepsilon_1 > 0$ найдено $\delta = \delta(\varepsilon_1)$ такое, что из неравенства $\|\overline{y}_0\| < \delta$ вытекает оценка $\|\overline{y}(t; \overline{y}_0)\| < \varepsilon_1$ для всех $t \geqslant 0$, означающая устойчивость нулевого решения. □

Пример 2.4.3. *Исследуем устойчивость решения* $(0, 0)$ *системы*

$$\begin{cases} dy_1/dt = -y_1 y_2^4, \\ dy_2/dt = y_1^4 y_2. \end{cases}$$

Имеем $f_1(y_1, y_2) = -y_1 y_2^4$, $f_2(y_1, y_2) = y_1^4 y_2$,

$$A = \left(\frac{\partial f_i(0,0)}{\partial y_j} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Первый метод Ляпунова неприменим, так как матрица A *имеет собственные значения* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Положительно определенная функция $V(y_1, y_2) = y_1^4 + y_2^4$ *является функцией Ляпунова рассматриваемой системы, поскольку*

$$\frac{\partial V(y_1,y_2)}{\partial y_1} f_1(y_1,y_2) + \frac{\partial V(y_1,y_2)}{\partial y_2} f_2(y_1,y_2) = 4y_1^3 \cdot (-y_1 y_2^4) + 4y_2^3 \cdot (y_1^4 y_2) \equiv 0.$$

Следовательно, выполнено условие (2.20). Согласно теореме 2.4.1 нулевое решение устойчиво по Ляпунову.

2.4.4. Теорема об асимптотической устойчивости

Теорема 2.4.2. *Пусть на множестве* Ω *существует функция Ляпунова* $V(\overline{y})$ *системы (2.19), удовлетворяющая неравенству*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\overline{y})}{\partial y_j} f_j(t, \overline{y}) \leqslant -W(\overline{y}), \quad \forall \overline{y} \in \Omega, \quad t \geqslant 0, \tag{2.25}$$

где $W(\overline{y})$ *– некоторая непрерывная положительно определенная на* Ω *функция.*

Тогда нулевое решение $\overline{y}(t; \overline{\theta}) = \overline{\theta}$ *системы (2.19) является асимптотически устойчивым.*

Доказательство. Устойчивость по Ляпунову нулевого решения следует из теоремы 2.4.1. Остается доказать, что для решения $\overline{y}(t) = \overline{y}(t; \overline{y}_0)$ задачи Коши (2.19) выполнено

$$\overline{y}(t) \to \overline{\theta} \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

если только $\overline{y}_0$ находится в некоторой окрестности нулевого решения.

Из доказательства теоремы 2.4.1 вытекает ограниченность траектории $\overline{y}(t)$, поскольку она принадлежит ε_1-окрестности нулевого решения.

Поэтому и функция $V(\overline{y}(t))$, являясь скалярной функцией аргумента t, ограничена снизу и не возрастает благодаря неравенству

$$\frac{dV(\overline{y}(t))}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(\overline{y}(t))}{\partial y_j} f_j(t, \overline{y}(t)) \leqslant -W(\overline{y}(t)) \leqslant 0,$$

которое следует из (2.25). Тогда существует предел

$$\lim_{t\to+\infty} V(\overline{y}(t)) = \alpha \geqslant 0.$$

Убедимся, что $\alpha = 0$. Действительно, если $\alpha > 0$, то в силу невозрастания $V(\overline{y}(t))$ из неравенства $V(\overline{y}(t)) \geqslant \alpha$ согласно п. 2 леммы 2.4.1 вытекает оценка $\|\overline{y}(t)\| \geqslant \varepsilon_3 > 0$ для всех $t \geqslant 0$, где $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(\alpha)$. Применяя лемму 2.4.1 п. 1 для положительно определенной функции $W(\overline{y})$, убеждаемся в справедливости неравенства $W(\overline{y}(t)) \geqslant \beta$ для всех $t \geqslant 0$, где $\beta = \beta(\varepsilon_3) > 0$. Тогда при $t \to +\infty$ в силу (2.25) и формулы конечных приращений Лагранжа имеем

$$V(\overline{y}(t)) - V(\overline{y}(0)) = \frac{dV(\overline{y}(\xi))}{dt} t \leqslant -W(\overline{y}(\xi))t \leqslant -\beta t \to -\infty,$$

что противоречит положительной определенности $V(\overline{y})$.

Таким образом $V(\overline{y}(t)) \to \alpha = 0$ и, в силу следствия из леммы 2.4.1, окончательно убеждаемся, что $\overline{y}(t) \to \overline{\theta}$ при $t \to +\infty$. □

Пример 2.4.4. *Исследуем устойчивость решения* $(0,0)$ *системы*

$$\begin{cases} dy_1/dt = -y_2 - y_1^3, \\ dy_2/dt = y_1 - y_2^3. \end{cases}$$

Имеем $f_1(y_1, y_2) = -y_2 - y_1^3$, $f_2(y_1, y_2) = y_1 - y_2^3$,

$$A = \left(\frac{\partial f_i(0,0)}{\partial y_j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Первый метод Ляпунова неприменим, так как матрица A *имеет собственные значения* $\lambda_{1,2} = \pm i$. *Для* $V(y_1, y_2) = (y_1^2 + y_2^2)/2$ *имеем*

$$\frac{\partial V(y_1, y_2)}{\partial y_1} f_1(y_1, y_2) + \frac{\partial V(y_1, y_2)}{\partial y_2} f_2(y_1, y_2) = \\ = y_1 \cdot (-y_2 - y_1^3) + y_2 \cdot (y_1 - y_2^3) = -(y_1^4 + y_2^4).$$

Следовательно, функция $V(y_1, y_2)$ является функцией Ляпунова, которая удовлетворяет условию (2.25) с непрерывной положительно определенной функцией $W(y_1, y_2) = y_1^4 + y_2^4$. Поэтому, согласно теореме 2.4.2, нулевое решение асимптотически устойчиво по Ляпунову.

2.4.5. Теорема Четаева о неустойчивости

8. Исследование поведения решения системы в окрестности точек покоя. Классификация точек покоя.

2.4.6. Устойчивость точек покоя

Точка $\overline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой покоя (положением равновесия) автономной системы

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = \overline{f}(\overline{y}(t)), \tag{2.30}$$

если $\overline{f}(\overline{y}_0) = \overline{\theta}$. Таким образом, координаты точек покоя находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(y_1, \ldots, y_n) = 0, \\ \ldots \\ f_n(y_1, \ldots, y_n) = 0. \end{cases}$$

Если $\overline{y}_0$ – точка покоя, то функция $\overline{y}(t) = \overline{y}_0$ является не зависящим от переменной t решением системы (2.30). Траектория такого решения представляет собой прямую линию в пространстве $(t, y_1, \ldots, y_n)$, а в фазовом пространстве переменных $(y_1, \ldots, y_n)$ – одну точку. Будем называть точку покоя $\overline{y}_0$ устойчивой, асимптотически устойчивой или неустойчивой по Ляпунову, если соответствующее решение $\overline{y}(t) = \overline{y}_0$ устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво по Ляпунову.

Для исследования устойчивости точки покоя можно сделать замену переменных $\overline{y}(t) = \widehat{y}(t) + \overline{y}_0$ и перейти к исследованию устойчивости нулевого решения системы

$$\frac{d\widehat{y}(t)}{dt} = \overline{F}(\widehat{y}(t)), \quad \overline{F}(\widehat{y}) = \overline{f}(\widehat{y} + \overline{y}_0).$$

Для применения теоремы 2.3.1 вычислим элементы матрицы производных $A = (a_{ij})$:

$$a_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(0, \ldots, 0) = \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\overline{y}_0).$$

В результате приходим к утверждению об устойчивости по первому приближению произвольной (не обязательно нулевой) точки покоя.

Теорема 2.4.4. *Пусть $\overline{y}_0$ – точка покоя системы (2.30), функции $f_j(\overline{y})$ дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности $\overline{y}_0$, $j = 1, \ldots, n$.*

Если все собственные значения матрицы $A = \big(\partial f_i(\overline{y}_0)/\partial y_j\big)$ имеют отрицательные вещественные части:

$$\operatorname{Re} \lambda_k < 0, \quad \forall\, k = 1, \ldots, n,$$

то точка покоя $\overline{y}_0$ асимптотически устойчива по Ляпунову.

Если же найдется хотя бы одно собственное значения матрицы $A = \big(\partial f_i(\overline{y}_0)/\partial y_j\big)$ с положительной вещественной частью:

$$\exists \lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} : \operatorname{Re} \lambda > 0,$$

то точка покоя $\overline{y}_0$ неустойчива по Ляпунову.

2.5. Классификация точек покоя

Доказанные выше теоремы 2.2.1-2.2.3 позволяют исследовать на устойчивость точки покоя линейной системы с постоянными коэффициентами и ответить на вопрос, что происходит со стартующей из окрестности точки покоя траекторией: остается ли она в этой окрестности при $t \to +\infty$, либо покидает ее за конечное время. Вместе с тем часто бывает необходимо уточнить характерный вид траекторий в окрестности точки покоя и, по возможности, вне ее. В данном параграфе мы приведем классификацию точек покоя линейной системы на плоскости ($n = 2$).

2.5.1. Классификация точек покоя линейной системы

Рассмотрим линейную систему с постоянными вещественными коэффициентами относительно вектор-функции $\overline{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))^\top$

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = A\overline{y}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

Нас будут интересовать фазовые (то есть в плоскости (y_1, y_2)) траектории системы (2.31). Заметим, что фазовые траектории этой системы являются интегральными кривыми обыкновенного дифференциального уравнения, полученного после исключения переменной t из (2.31)

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{a_{11}y_1 + a_{12}y_2}{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}. \tag{2.32}$$

Точка покоя $(0, 0)$ является особой для уравнения (2.32), поскольку в ней нарушены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Поэтому через точку $(0, 0)$ может проходить как несколько фазовых кривых, так и ни одной. Таким образом, точка покоя $(0, 0)$ исходной системы (2.31) является особой точкой уравнения (2.32) в фазовых переменных.

Классификацию точек покоя будем проводить в зависимости от собственных значений и собственных векторов матрицы A. В рассматриваемом случае $n = 2$ имеется два собственных значения λ_1, λ_2. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то соответствующие собственные векторы

$$\overline{h}_1 = \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix}, \quad \overline{h}_2 = \begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{pmatrix}$$

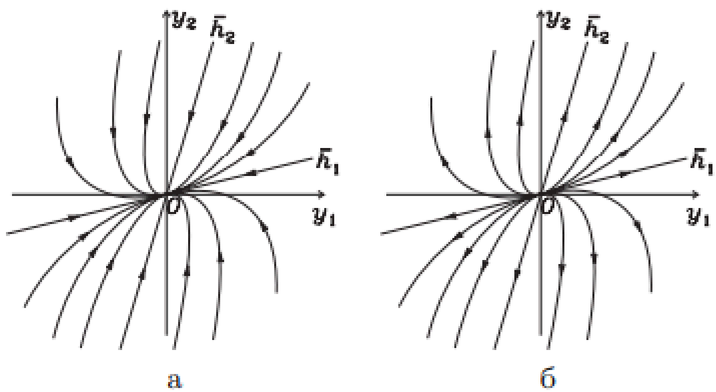


Рис. 2.6. Узел: а – устойчивый, б – неустойчивый.

линейно независимы и составляют базис в $\mathbb{C}^2$. Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то возможно существование как двух, так и одного линейно независимого собственного вектора; в последнем случае существует один присоединенный вектор, линейно независимый с собственным. Рассмотрим типы точек покоя в случае невырожденной матрицы A ($\det A \neq 0$).

2.5.2. Узел ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$)

Общее решение системы (2.31) имеет вид

$$\overline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix} \exp\{\lambda_1 t\} + C_2 \begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{pmatrix} \exp\{\lambda_2 t\},$$
$$\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.33)$$

Рассмотрим сначала случай, когда собственные значения отрицательны: $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Тогда нулевая точка покоя асимптотически устойчива по Ляпунову и называется устойчивым узлом. Фазовые кривые при $t \to +\infty$ стремятся к устойчивому узлу: $\overline{y}(t) \to \overline{\theta}$. Выясним, по какому направлению фазовые траектории входят в узел. Для этого вычислим производную

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{C_1 h_{11}\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 h_{12}\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{C_1 h_{21}\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 h_{22}\lambda_2 e^{\lambda_2 t}} = \frac{C_1 h_{11}\lambda_1 + C_2 h_{12}\lambda_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}{C_1 h_{21}\lambda_1 + C_2 h_{22}\lambda_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}. \quad (2.34)$$

Так как $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$, то при $C_1 \neq 0$ имеем $\dfrac{dy_1}{dy_2} \to \dfrac{h_{11}}{h_{21}}$ при $t \to +\infty$, то есть касательный вектор фазовой траектории в пределе коллинеарен собственному вектору $\overline{h}_1$. Если же $C_1 = 0$, то

$$\overline{y}(t) = C_2 \begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}.$$

Значит, фазовая траектория лежит на прямой, задаваемой собственным вектором $\overline{h}_2$, и приближается к точке покоя при $t \to +\infty$.

Выясним направление фазовых траекторий при $t \to -\infty$. В этом случае фазовые траектории, отличные от точки покоя, стремятся к бесконечно удаленной точке. В силу (2.33) при $C_2 \neq 0$ имеем

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{C_1 h_{11} \lambda_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + C_2 h_{12} \lambda_2}{C_1 h_{21} \lambda_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + C_2 h_{22} \lambda_2} \to \frac{h_{12}}{h_{22}}, \quad t \to -\infty, \quad (\lambda_1 - \lambda_2 > 0),$$

то есть траектории в окрестности бесконечно удаленной точки выстраиваются параллельно вектору $\overline{h}_2$. Если же $C_2 = 0$, то

$$\overline{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t},$$

и фазовая траектория лежит на прямой, задаваемой собственным вектором $\overline{h}_1$. Проведенные выкладки иллюстрируются на рис. 2.6, изображающем фазовые траектории в случае устойчивого узла, стрелки на траекториях указывают направление движения при увеличении t.

Для положительных собственных значений $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ точка покоя называется неустойчивым узлом, расположение и вид траекторий остаются теми же, что и для отрицательных собственных значений, но направление движения по траекториям меняется на противоположное.

Полезно помнить следующее правило узла: фазовые траектории входят в узел, касаясь собственного вектора с наименьшим по модулю собственным значением.

2.5.3. Дикритический узел $(\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0,\ \dim\ker(A - \lambda_1 E) = 2)$

В случае дикритического узла двукратному собственному значению $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ отвечают два линейно независимых собственных вектора $\overline{h}_1$ и $\overline{h}_2$ матрицы A. Тогда выражение (2.33) для общего решения принимает вид

$$\overline{y}(t) = (C_1 \overline{h}_1 + C_2 \overline{h}_2) \exp\{\lambda t\}$$

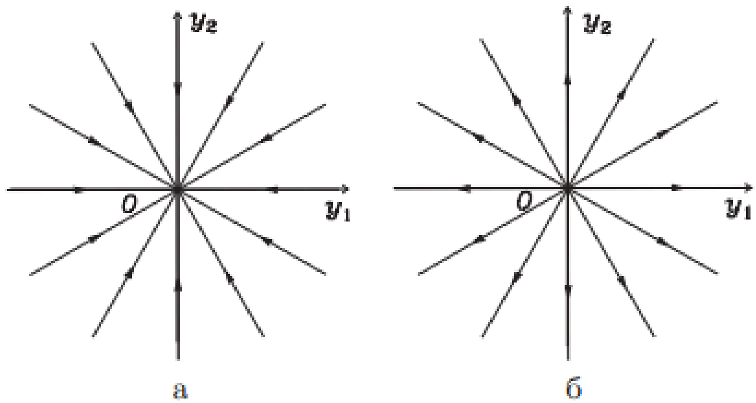


Рис. 2.7. Дикритический узел: а – устойчивый, б – неустойчивый.

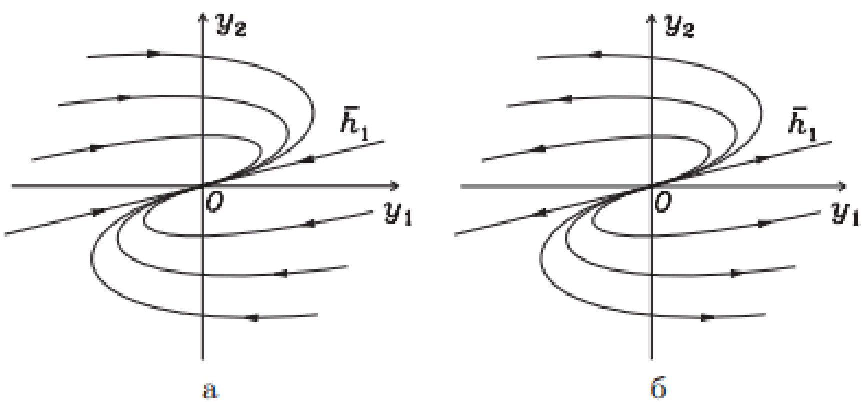


Рис. 2.8. Вырожденный узел: а – устойчивый, б – неустойчивый.

и определяет на плоскости (y_1, y_2) совокупность всевозможных лучей, входящих в точку покоя для $\lambda < 0$ (устойчивый дикритический узел) и выходящих из точки покоя для $\lambda > 0$ (неустойчивый дикритический узел), если $t \to +\infty$ (см. рис. 2.7).

2.5.4. Вырожденный узел ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, $\dim\ker(A - \lambda_1 E) = 1$)

Вырожденный узел устойчив, если $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, и неустойчив, если $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. В случае вырожденного узла двукратному собственному значению $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ отвечают один собственный вектор $\overline{h}_1$ матрицы

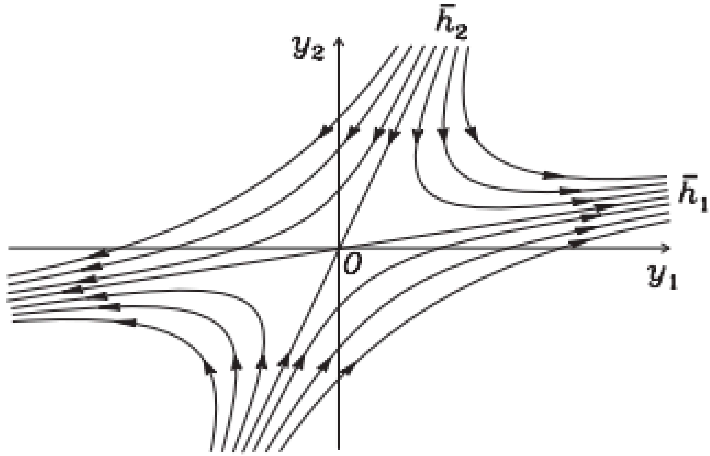


Рис. 2.9. Седло.

A и один присоединенный вектор $\overline{p}_1$. Общее решение системы (2.31) записывается в виде

$$\overline{y}(t) = C_1\overline{h}_1 \exp\{\lambda t\} + C_2(\overline{p}_1 + t\overline{h}_1) \exp\{\lambda t\}.$$

Если $C_2 = 0$, то фазовые траектории решения $\overline{y}(t) = C_1\overline{h}_1 \exp\{\lambda t\}$ состоят из двух лучей, входящих в точку покоя для $\lambda < 0$ (выходящих из точки покоя для $\lambda > 0$) при $t \to +\infty$ по направлению собственного вектора. Если $C_2 \neq 0$, то

$$\overline{y}(t) = t \exp\{\lambda t\}(C_2\overline{h}_1 + \overline{o}(1)), \quad t \to +\infty.$$

Видно, что решение касается собственного вектора в точке покоя при $t \to +\infty$ для $\lambda < 0$ либо при $t \to -\infty$ для $\lambda > 0$. На бесконечности при $t \to -\infty$ для $\lambda > 0$ либо при $t \to +\infty$ для $\lambda < 0$ фазовая траектория опять выстраивается по направлению собственного вектора, но в противоположном направлении благодаря смене знака множителя t. Типичная картина фазовых траекторий для вырожденного узла приведена на рисунке 2.8.

2.5.5. Седло ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$)

Ясно, что седло является неустойчивой точкой покоя. Воспользуемся для анализа поведения траекторий формулой (2.33). Для $C_1 \neq 0$ при

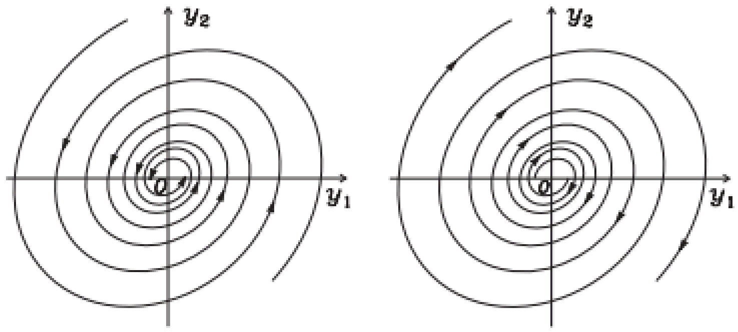


Рис. 2.10. Фокус: а – устойчивый, б – неустойчивый.

$t \to +\infty$ получаем представление

$$\overline{y}(t) = \exp\{\lambda_1 t\}\big(C_1 \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{pmatrix} \exp\{(\lambda_2 - \lambda_1)t\}\big) =$$

$$= \exp\{\lambda_1 t\}\big(C_1 \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix} + \overline{o}(1)\big).$$

Кроме того, из (2.34) нетрудно видеть, что $\dfrac{dy_1}{dy_2} \to \dfrac{h_{11}}{h_{21}}$, то есть фазовые траектории при $t \to +\infty$ стремятся к бесконечно удаленной точке и имеют асимптоту, задаваемую собственным вектором $\overline{h}_1$. Если же $C_1 = 0$, то $\overline{y}(t) = C_2\overline{h}_2 \exp\{\lambda_2 t\}$, и фазовая траектория лежит на прямой, задаваемой собственным вектором $\overline{h}_2$, приближаясь к точке покоя при $t \to +\infty$.

Для $t \to -\infty$ картина противоположная: фазовые траектории стремятся к бесконечно удаленной точке при $C_2 \neq 0$ и имеют асимптоту, задаваемую вектором $\overline{h}_2$. Если $C_2 = 0$, то $\overline{y}(t) = C_1\overline{h}_1 \exp\{\lambda_1 t\}$, и фазовая траектория лежит на прямой, задаваемой собственным вектором $\overline{h}_1$, приближаясь к точке покоя при $t \to -\infty$. Проведенные выкладки иллюстрируются рисунком 2.9.

2.5.6. Фокус ($\lambda_{1,2} = \delta \pm i\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 0$, $\delta \neq 0$)

Точка покоя называется фокусом, если матрица A имеет комплексно сопряженные собственные значения с ненулевыми действительной и мнимой частями. Пусть $\overline{h} = \overline{h}_1 + i\overline{h}_2$ – собственный вектор с линейно независимыми $\overline{h}_{1,2}$, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = \delta + i\omega$. Тогда действительная и мнимая части комплекснозначной вектор функции $\overline{z}(t) = \overline{h}\exp\{\lambda_1 t\}$ составляют вещественную фундаментальную систему решений системы:

$$\overline{y}_1(t) = \operatorname{Re}\overline{z}(t) = \exp\{\delta t\}\big(\overline{h}_1\cos\omega t - \overline{h}_2\sin\omega t\big),$$
$$\overline{y}_2(t) = \operatorname{Im}\overline{z}(t) = \exp\{\delta t\}\big(\overline{h}_1\sin\omega t + \overline{h}_2\cos\omega t\big).$$

Поэтому общее вещественное решение имеет вид

$$\begin{aligned}&\overline{y}(t) = C_1\overline{y}_1(t) + C_2\overline{y}_2(t) = \\ &= \exp\{\delta t\}\big(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t\big)\overline{h}_1 + \exp\{\delta t\}\big(C_2\cos\omega t - C_1\sin\omega t\big)\overline{h}_2.\end{aligned}$$

Обозначая $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \neq 0$ и вводя вспомогательный угол ψ из условий

$$\sin\psi = \frac{C_1}{C}, \quad \cos\psi = \frac{C_2}{C},$$

приходим к разложению решения по базису, составленному из векторов $\overline{h}_1$ и $\overline{h}_2$:

$$\overline{y}(t) = \xi_1(t)\overline{h}_1 + \xi_2(t)\overline{h}_2.$$

Коэффициенты разложения определяются из соотношений

$$\xi_1(t) = C\exp\{\delta t\}\sin(\omega t + \psi), \quad \xi_2(t) = C\exp\{\delta t\}\cos(\omega t + \psi),$$

задающих логарифмическую спираль, которая при $t \to +\infty$ скручивается для $\delta < 0$ (устойчивый фокус, $\xi_1^2(t) + \xi_2^2(t) \to 0$) и раскручивается для $\delta > 0$ (неустойчивый фокус, $\xi_1^2(t) + \xi_2^2(t) \to +\infty$). Характерное поведение фазовых кривых в случае фокуса приведено на рисунке 2.10.

2.5.7. Центр ($\lambda_{1,2} = \pm i\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 0$)

Точка покоя называется центром, если матрица A имеет чисто мнимые комплексно сопряженные собственные значения. Таким образом, центр – устойчивая точка покоя, не являющаяся асимптотически устойчивой. С помощью комплекснозначного собственного вектора $\overline{h} = \overline{h}_1 + i\overline{h}_2$ с линейно независимыми вещественными составляющими $\overline{h}_1$ и $\overline{h}_2$ аналогично случаю фокуса запишем общее решение в виде разложения $\overline{y}(t) = \xi_1(t)\overline{h}_1 + \xi_2(t)\overline{h}_2$ с коэффициентами

$$\xi_1(t) = C\sin(\omega t + \psi), \quad \xi_2(t) = C\cos(\omega t + \psi),$$

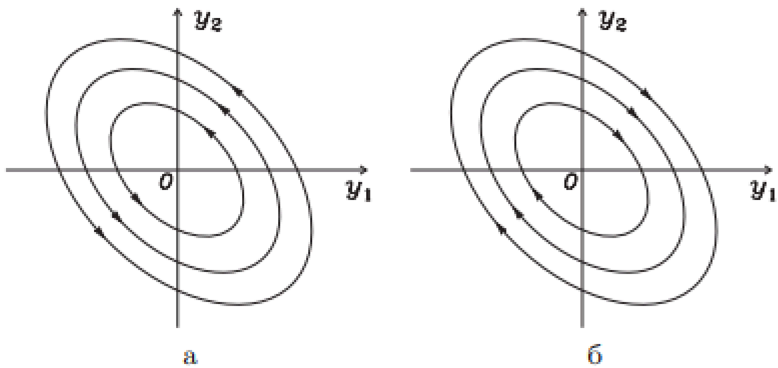


Рис. 2.11. Центр.

удовлетворяющими равенству $\xi_1^2(t) + \xi_2^2(t) = C^2$. Тогда вектор коэффициентов $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ описывает периодическое движение по окружности, которому в исходных координатах соответствует в общем случае движение по эллипсу (см. рис. 2.11).

2.5.8. Случай вырожденной матрицы A $(\det A = 0)$

У вырожденной матрицы одно или оба собственных значения равны нулю. Рассмотрим возникающие здесь случаи.

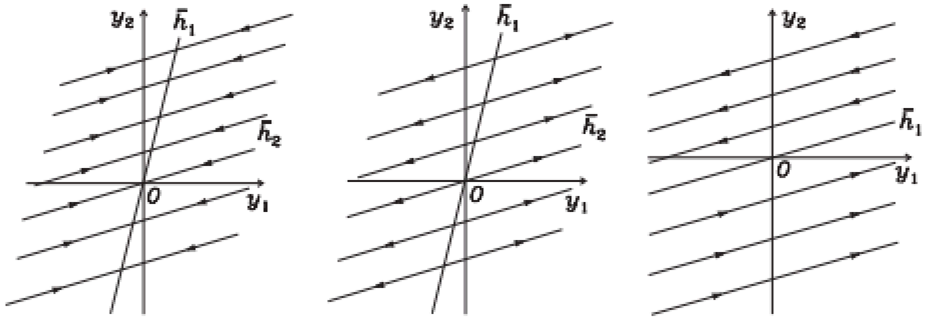
Пусть $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, и $\overline{h}_1$, $\overline{h}_2$ – соответствующие линейно независимые собственные векторы. Тогда общее решение имеет вид

$$\overline{y}(t) = C_1\overline{h}_1 + C_2\overline{h}_2\exp\{\lambda_2 t\}.$$

Вся прямая, проходящая через начало координат параллельно вектору $\overline{h}_1$, состоит из точек покоя. Из остальных точек плоскости движение происходит по прямым, параллельным второму собственному вектору $\overline{h}_2$, приближаясь к точке покоя при $t \to +\infty$ в случае $\lambda_2 < 0$ и при $t \to -\infty$ в случае $\lambda_2 > 0$. Характер фазовых траекторий представлен на рисунках 2.12a и 2.12b.

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и $\dim\ker A = 2$, то есть существуют линейно независимые собственные векторы $\overline{h}_1$ и $\overline{h}_2$. Тогда матрица A состоит из одних нулей, а общее решение (2.31) имеет вид

$$\overline{y}(t) = C_1\overline{h}_1 + C_2\overline{h}_2.$$



а б в

Рис. 2.12. Случай вырожденной матрицы.

Все точки плоскости являются точками покоя в рассматриваемом слу-чае.

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и $\dim\ker A = 1$, то есть существует один линейно независимый собственный вектор $\overline{h}$. Тогда найдется соответствующий присоединенный вектор $\overline{p}$. Общее решение (2.31) имеет вид

$$\overline{y}(t) = C_1\overline{h} + C_2(\overline{p} + t\overline{h}) = (C_1 + C_2 t)\overline{h} + C_2\overline{p}.$$

Вся прямая, проходящая через начало координат параллельно собственному вектору $\overline{h}$, состоит из неустойчивых точек покоя. Из остальных точек плоскости движение происходит по прямым, параллельным собственному вектору $\overline{h}$, причем направление движения противоположно в полуплоскостях, отвечающих $C_2 > 0$ и $C_2 < 0$. Характер фазовых траекторий представлен на рисунке 2.12в.

2.5.9. Классификация точек покоя нелинейной системы

Точку покоя $\overline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ автономной системы

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = \overline{f}(\overline{y}(t)) \tag{2.35}$$

будем называть грубой, если матрица производных

$$A = \big(a_{ij}\big), \quad a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\overline{y}_0), \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{2.36}$$

имеет ровно n попарно различных собственных значений с ненулевой вещественной частью. Устойчивость по Ляпунову грубой особой точки всегда однозначно определяется с помощью первого метода Ляпунова согласно теореме 2.4.4. Оказывается, что и качественное поведение фазовых траекторий системы (2.35) достаточно полно описывается с помощью линейной системы

$$\frac{d\widehat{y}(t)}{dt} = A\widehat{y}(t) \tag{2.37}$$

в малой окрестности каждой грубой точки покоя.

На плоскости ($n = 2$) грубой точке покоя соответствует линейная система вида (2.37), имеющая нулевую точку покоя только одного из следующих типов: узел, седло или фокус. Будем называть грубую точку покоя нелинейной системы узлом, седлом или фокусом, если этот тип имеет нулевая точка покоя соответствующий линейной системы (2.37) с матрицей (2.36).

Пример 2.5.1. *Определить тип точек покоя системы*

$$\begin{cases} dy_1/dt = y_1 - 1, \\ dy_2/dt = y_1^2 - y_2^2. \end{cases}$$

Точки покоя определяются из алгебраической системы

$$\begin{cases} y_1 - 1 = 0, \\ y_1^2 - y_2^2 = 0, \end{cases}$$

имеющей два решения: $(1, \pm 1)^\top$. Так как для данной системы

$$f_1(y_1, y_2) = y_1^2 - y_2^2, \quad f_2(y_1, y_2) = y_1^2 - y_2^2,$$

то

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 2y_1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = -2y_2.$$

Для точки покоя $(1,1)^\top$ матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ имеет собственные значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Тогда $(1,1)^\top$ – седло.

Для точки покоя $(1,-1)^\top$ матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ имеет собственные значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Тогда $(1,-1)^\top$ – неустойчивый узел.

9. Постановка краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка, редукция к основной краевой задаче.

В предыдущих параграфах много внимания было уделено исследованию задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. В задаче Коши для уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной, в качестве дополнительных условий для выделения единственного решения задаются значения функции и ее производных до $(n-1)$-го порядка в некоторой точке. Возможны и другие постановки задач, в которых дополнительные условия задаются при двух значениях независимой переменной. Приведем два примера.

Рассмотрим движение материальной точки единичной массы вдоль прямой y. Движение определяется известной силой F, зависящей от времени t, положения точки $y(t)$ и ее скорости $y'(t)$. В соответствии с законом Ньютона, получим дифференциальное уравнение второго порядка для неизвестной функции $y(t)$

$$y''(t) = F(t, y(t), y'(t)), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1. \tag{3.1}$$

Если мы знаем положение точки в начальный момент времени и конечный момент времени, то

$$y(t_0) = y_0, \quad y(t_1) = y_1. \tag{3.2}$$

Таким образом, нам нужно решить следующую задачу: найти функцию $y(t)$, удовлетворяющую обыкновенному дифференциальному уравнению (3.1) и краевым условиям (3.2).

Другим примером краевой задачи может служить задача, описывающая распределение температуры $u(x)$ в тонком стержне

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u = -f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3.3}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(l) = 0. \tag{3.4}$$

Краевое условие $u(0) = u_0$ соответствует тому, что на левом конце стержня известна температура, а краевое условие $u'(l) = 0$ означает, что правый конец стержня теплоизолирован. Функции $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ заданы. Нужно найти распределение температуры в стержне $u(x)$, то есть решить краевую задачу (3.3), (3.4).

В общем случае, краевой задачей для дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной, рассматриваемого на отрезке $[0, l]$, называется задача, в которой значения неизвестной функции $y(x)$, ее производных или их линейная комбинация задаются как в точке $x = 0$, так и в точке $x = l$.

Мы ограничимся исследованием краевых задач для линейного дифференциального уравнения второго порядка.

Важной особенностью краевых задач является то, что их решение не всегда существует, а если существует, то может быть неединственно. Действительно, рассмотрим уравнение

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \tag{3.5}$$

с краевыми условиями

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = y_1. \tag{3.6}$$

Общее решение уравнения (3.5) имеет вид $c_1 \sin x + c_2 \cos x$. Из краевого условия $y(0) = 0$ получим, что $y(x) = c_1 \sin x$. Если $y_1 \neq 0$, то решение задачи (3.5), (3.6) не существует. Если же $y_1 = 0$, то решением задачи (3.5), (3.6) является функция $y(x) = c_1 \sin x$, где c_1 – произвольная постоянная, то есть решение краевой задачи неединственно. Отметим, что решение задачи Коши для уравнения (3.5) с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ существует и единственно при любых фиксированных y_0, y_1 и $x_0 \in [0, \pi]$.

Редукция

Рассмотрим краевые условия (3.8). Если $u_0 = u_1 = 0$, то краевые условия называются однородными, в противном случае – неоднородными. Покажем, что задачу (3.9), (3.8) можно свести к задаче с однородными краевыми условиями. Пусть $y(x)$ – решение задачи (3.9), (3.8). Рассмотрим функцию $z(x) = y(x) - v(x)$, где $v(x)$ – известная дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая краевым условиям (3.8). Подставив в (3.9), (3.8) $y(x) = z(x) + v(x)$, получим для функции $z(x)$ краевую задачу с однородными краевыми условиями

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dz}{dx}\right) - q(x)z = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

$$\alpha_1 z'(0) + \beta_1 z(0) = 0, \quad \alpha_2 z'(l) + \beta_2 z(l) = 0,$$

где

$$f(x) = f_2(x) - \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dv}{dx}\right) + q(x)v.$$

Функцию $v(x)$, удовлетворяющую неоднородным краевым условиям (3.8), можно выбрать различными способами, одним из самых простых является ее поиск в виле многочлена.

Мы показали, что краевую задачу можно свести к краевой задаче с однородными краевыми условиями

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3.10}$$

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \quad \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0. \tag{3.11}$$

Далее эту задачу будем называть основной краевой задачей. Краевая задача (3.10), (3.11) называется *однородной*, если $f(x) = 0$ и *неоднородной* в противном случае.

10. Тождество Лагранжа, формула Грина, формула для определителя Вронского.

3.1.3. Тождество Лагранжа и его следствие

Выведем некоторые соотношения, которые будут нам полезны в дальнейшем. Введем дифференциальный оператор

$$Ly = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y.$$

Пусть функции $y(x) \in C^2[0,l]$ и $z(x) \in C^2[0,l]$, тогда можно вычислить Ly и Lz, а также выражение

$$z(x)Ly - y(x)Lz = z(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - y(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dz}{dx}\right).$$

Так как

$$z(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - y(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dz}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\left(z(x)\frac{dy}{dx} - y(x)\frac{dz}{dx}\right)\right],$$

то

$$z(x)Ly - y(x)Lz = \frac{d}{dx}\left[p(x)\left(z(x)\frac{dy}{dx} - y(x)\frac{dz}{dx}\right)\right], \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \quad (3.12)$$

Это равенство называется тождеством Лагранжа.

Получим одно важное следствие из тождества Лагранжа. Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ – линейно независимые решения однородного уравнения $Ly = 0$, то есть $Ly_1 = Ly_2 = 0$. Записывая для функций $y_1(x), y_2(x)$ тождество Лагранжа (3.12), получим

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\left(y_1(x)\frac{dy_2}{dx} - y_2(x)\frac{dy_1}{dx}\right)\right] = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \quad (3.13)$$

Следовательно, для определителя Вронского

$$W[y_1, y_2](x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

справедлива формула $p(x)W[y_1, y_2](x) = c$, $0 \leqslant x \leqslant l$, где c – постоянная, или

$$W[y_1, y_2](x) = \frac{c}{p(x)}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \quad (3.14)$$

3.1.4. Формула Грина и ее следствие

Интегрируя тождество Лагранжа (3.12) от 0 до l, получим

$$\int\limits_0^l (z(x)Ly - y(x)Lz)\,dx = p(x)\big(z(x)y'(x) - y(x)z'(x)\big)\Big|_{x=0}^{x=l}. \qquad (3.15)$$

Эта формула называется формулой Грина.

Покажем, что, если функции $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют одним и тем же краевым условиям (3.11), то справедливо равенство

$$\int\limits_0^l (z(x)Ly - y(x)Lz)\,dx = 0. \qquad (3.16)$$

Действительно, из формулы Грина следует, что достаточно доказать равенство

$$p(l)\big(z(l)y'(l) - y(l)z'(l)\big) - p(0)\big(z(0)y'(0) - y(0)z'(0)\big) = 0.$$

Покажем, что

$$z(0)y'(0) - y(0)z'(0) = 0. \qquad (3.17)$$

Если $\alpha_1 = 0$, то $\beta_1 \neq 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$, и (3.17) выполнено. При $\alpha_1 \neq 0$ запишем граничные условия

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \quad \alpha_1 z'(0) + \beta_1 z(0) = 0,$$

умножим первое равенство на $z(0)$, второе – на $y(0)$. Вычитая почленно полученные равенства, имеем

$$\alpha_1(z(0)y'(0) - y(0)z'(0)) = 0,$$

откуда вытекает (3.17). Аналогично доказывается, что

$$z(l)y'(l) - y(l)z'(l) = 0.$$

Тем самым равенство (3.16) доказано.

Далее не сильно нужно я думаю

Для системы функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ **определитель Вронского** определяется как:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Свойства:

- Если $W \neq 0$ хотя бы в одной точке, то функции линейно независимы.
- Для решений линейного однородного ОДУ n-го порядка:
  - Если $W = 0$ в какой-то точке, то $W \equiv 0$ (функции линейно зависимы).
  - Если $W \neq 0$ в какой-то точке, то $W \neq 0$ всюду.

Формула Лиувилля–Остроградского (для ОДУ 2-го порядка $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$):

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}.$$

Пример вычисления вронскиана

Для функций $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^x \cdot e^{-x} - e^x \cdot e^{-x} = -2 \neq 0.$$

Функции линейно независимы.

11. Функция Грина. Теорема о существовании и единственности функции Грина.

3.2. Функция Грина. Существование решения краевой задачи

Рассмотрим краевую задачу

$$Ly \equiv \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3.18}$$

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \tag{3.19}$$

$$\alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0, \tag{3.20}$$

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – известные функции, а α_1, β_1, α_2, β_2 – известные постоянные такие, что $p(x) \in C^1[0,l]$, $p(x) > 0$, $x \in [0,l]$, $q(x), f(x) \in C[0,l]$, $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$, $i = 1,2$.

Определение 3.2.1. *Функция $y(x)$ называется решением краевой задачи (3.18)-(3.20), если $y(x) \in C^2[0,l]$ и удовлетворяет (3.18)-(3.20).*

3.2.1. Функция Грина

Введем функцию Грина, которая далее будет использована для решения краевой задачи (3.18)-(3.20).

Определение 3.2.2. *Функция $G(x,\xi)$ называется функцией Грина краевой задачи (3.18)-(3.20), если она определена в квадрате $[0,l]\times[0,l]$ и удовлетворяет следующим условиям:*

1) *Для любого $\xi \in (0,l)$ функция $G(x,\xi)$ дважды непрерывно дифференцируема по переменной x на множестве $[0,\xi)\cup(\xi,l]$ и удовлетворяет однородному уравнению*

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dG(x,\xi)}{dx}\right) - q(x)G(x,\xi) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad x \neq \xi.$$

2) *Функция $G(x,\xi)$ удовлетворяет однородным краевым условиям по переменной x:*

$$\alpha_1 G_x(0,\xi) + \beta_1 G(0,\xi) = 0, \quad \alpha_2 G_x(l,\xi) + \beta_2 G(l,\xi) = 0, \quad \forall \xi \in (0,l).$$

3) Функция $G(x,\xi)$ *непрерывна в квадрате* $[0,l]\times[0,l]$, *а частная производная* $G_x(x,\xi)$ *при* $x=\xi$ *имеет конечные предельные значения*

$$G_x(\xi+0,\xi)=\lim_{x\to\xi+0}G_x(x,\xi),\quad G_x(\xi-0,\xi)=\lim_{x\to\xi-0}G_x(x,\xi),$$

связанные соотношением

$$G_x(\xi+0,\xi)-G_x(\xi-0,\xi)=\frac{1}{p(\xi)},\quad \forall\xi\in(0,l).$$

3.2.2. Существование и единственность функции Грина

Теорема 3.2.1. *Если однородная краевая задача*

$$Lv = 0, \quad \alpha_1 v'(0) + \beta_1 v(0) = 0, \quad \alpha_2 v'(l) + \beta_2 v(l) = 0 \tag{3.21}$$

имеет только нулевое решение, то функция Грина краевой задачи (3.18)-(3.20) существует и единственна.

Доказательство. Определим функцию $y_1(x)$ как решение задачи Коши

$$Ly_1 = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad y_1(0) = -\alpha_1, \quad y_1'(0) = \beta_1,$$

а функцию $y_2(x)$ как решение задачи Коши

$$Ly_2 = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad y_2(l) = -\alpha_2, \quad y_2'(l) = \beta_2.$$

Очевидно, что функция $y_1(x)$ удовлетворяет краевому условию (3.19), а $y_2(x)$ краевому условию (3.20):

$$\alpha_1 y_1'(0) + \beta_1 y_1(0) = 0, \quad \alpha_2 y_2'(l) + \beta_2 y_2(l) = 0. \tag{3.22}$$

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы, так как в противном случае однородная краевая задача имела бы ненулевое решение.

Будем искать функцию Грина в следующем виде:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} c_1(\xi) y_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ c_2(\xi) y_2(x), & \xi \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

где $c_1(\xi)$ и $c_2(\xi)$ неизвестные функции. Из этого представления следует, что функция $G(x, \xi)$ удовлетворяет условиям 1) и 2) определения функции Грина. Выберем $c_1(\xi)$ и $c_2(\xi)$ так, чтобы выполнялось и условие 3). Из непрерывности $G(x, \xi)$ в точке $x = \xi$ следует, что

$$c_1(\xi) y_1(\xi) = c_2(\xi) y_2(\xi).$$

Из условия разрыва производной $G_x(x,\xi)$ в точке $x=\xi$ имеем

$$c_2(\xi)y_2'(\xi) - c_1(\xi)y_1'(\xi) = \frac{1}{p(\xi)}.$$

Таким образом, мы получили систему двух уравнений относительно неизвестных функций $c_1(\xi)$ и $c_2(\xi)$. Решив эту систему, найдем, что

$$c_1(\xi) = \frac{y_2(\xi)}{W(\xi)p(\xi)}, \quad c_2(\xi) = \frac{y_1(\xi)}{W(\xi)p(\xi)},$$

где $W(\xi) = y_1(\xi)y_2'(\xi) - y_2(\xi)y_1'(\xi)$ – определитель Вронского. Как следует из формулы (3.14), $W(\xi)p(\xi) = g_0$ – известная постоянная. В результате получим окончательную формулу для функции Грина

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x)y_2(\xi)}{g_0}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{y_1(\xi)y_2(x)}{g_0}, & \xi \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{3.23}$$

Мы доказали существование функции Грина. Докажем теперь ее единственность. Предположим, что существуют две функции Грина: $G(x,\xi)$ и $\widehat{G}(x,\xi)$. Пусть ξ – произвольная фиксированная точка из интервала $(0,l)$. Рассмотрим функцию $z(x) = G(x,\xi) - \widehat{G}(x,\xi)$. Эта функция непрерывна на отрезке $[0,l]$ и имеет на нем непрерывную производную $z'(x)$, поскольку $G_x(x,\xi)$ и $\widehat{G}_x(x,\xi)$ имеют в точке $x=\xi$ один и тот же разрыв. Записывая далее из уравнения $Lz=0$, $x \neq \xi$, выражение

$$z''(x) = \frac{q(x)z(x) - p'(x)z'(x)}{p(x)},$$

убеждаемся в непрерывности второй производной при $x=\xi$ благодаря равенству ее предельных значений при $x \to \xi \pm 0$. Тогда функция $z(x)$ является решением уравнения также и при $x=\xi$,

$$Lz = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

и удовлетворяет условиям (3.19), (3.20). По условию теоремы однородная краевая задача на отрезке $[0,l]$ имеет только тривиальное решение. Поэтому $z(x)=0$, а значит $G(x,\xi) = \widehat{G}(x,\xi)$, и теорема 3.2.1 доказана. $\square$

12. Теорема о существовании и единственности решения краевой задачи для неоднородного ОДУ.

3.2.3. Нахождение решения неоднородной краевой задачи с помощью функции Грина

Докажем теорему существования и единственности решения краевой задачи (3.18)-(3.20).

Теорема 3.2.2. *Если однородная краевая задача (3.21) имеет только нулевое решение, то решение краевой задачи (3.18)-(3.20) существует, единственно и задается формулой*

$$y(x) = \int_0^l G(x,\xi) f(\xi) d\xi, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{3.25}$$

Доказательство. Покажем, что функция $y(x)$, определяемая формулой (3.25), является решением краевой задачи (3.18)-(3.20).

Из формулы (3.23) для функции Грина следует, что

$$y(x) = \frac{y_2(x)}{g_0} \int_0^x y_1(\xi) f(\xi) d\xi + \frac{y_1(x)}{g_0} \int_x^l y_2(\xi) f(\xi) d\xi. \tag{3.26}$$

После дифференцирования и приведения подобных слагаемых получаем

$$y'(x) = \frac{y_2'(x)}{g_0} \int_0^x y_1(\xi) f(\xi) d\xi + \frac{y_1'(x)}{g_0} \int_x^l y_2(\xi) f(\xi) d\xi. \qquad (3.27)$$

Вычислим

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\big(y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)\big)p(x)}{g_0} f(x) +$$

$$+ \frac{1}{g_0}\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy_2}{dx}\right) \int_0^x y_1(\xi) f(\xi) d\xi + \frac{1}{g_0}\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy_1}{dx}\right) \int_x^l y_2(\xi) f(\xi) d\xi.$$

Так как $Ly_1 = Ly_2 = 0$, а $\big(y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)\big)p(x) = g_0$, то

$$Ly = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y(x) =$$

$$= f(x) + \frac{Ly_2}{g_0} \int_0^x y_1(\xi) f(\xi) d\xi + \frac{Ly_1}{g_0} \int_x^l y_2(\xi) f(\xi) d\xi = f(x).$$

Следовательно, $y(x)$ является решением уравнения (3.18).

Убедимся в выполнении краевых условий (3.19), (3.20). Из формул (3.26), (3.27) и (3.22) следует, что

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = \frac{\alpha_1 y_1'(0) + \beta_1 y_1(0)}{g_0} \int_0^l y_2(\xi) f(\xi) d\xi = 0.$$

Аналогично проверяется (3.20).

Докажем единственность полученного решения. Пусть имеется еще одно решение $\widetilde{y}(x)$ краевой задачи (3.18)-(3.20). Тогда их разность $v(x) = y(x) - \widetilde{y}(x)$ будет решением однородной краевой задачи (3.21) на отрезке $[0, l]$ и по условию теоремы равна нулю, то есть $y(x) - \widetilde{y}(x) \equiv 0$, и теорема 3.2.2 доказана. $\square$

13. Задача Штурма-Лиувилля. Теоремы о свойствах собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.

3.3. Задача Штурма-Лиувилля

Рассмотрим краевую задачу

$$Ly = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y = -\lambda y, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3.33}$$

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \tag{3.34}$$

$$\alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0, \tag{3.35}$$

где $p(x)$, $q(x)$ – известные действительные функции, α_1, β_1, α_2, β_2 – известные действительные постоянные такие, что $p(x) \in C^1[0,l]$, $p(x) > 0$, $x \in [0,l]$, $q(x) \in C[0,l]$, $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$, $i = 1,2$ и λ – комплексный параметр.

Очевидно, что при любом значении параметра λ краевая задача (3.33)-(3.35) имеет решение $y(x) = 0$.

Определение 3.3.1. *Если для некоторого λ_1 краевая задача (3.33)-(3.35) имеет нетривиальное решение $y_1(x)$, то λ_1 называется* ***собственным значением****, а $y_1(x)$* ***собственной функцией****.*

Задача поиска собственных значений и собственных функций называется задачей Штурма-Лиувилля.

Очевидно, что собственные функции определены с точностью до произвольной постоянной, а именно, если $y(x)$ – собственная функция, то и $cy(x)$, где c – произвольная отличная от нуля постоянная, является собственной функцией.

Задача решения уравнения (3.33) представляет собой задачу поиска собственных значений и собственных функций дифференциального оператора L. Важно отметить, что без краевых условий (3.34), (3.35) эта задача бессмысленна. Действительно, уравнение $Ly = -\lambda y(x)$ при любом λ имеет нетривиальное решение, поскольку при любом λ оно является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка.

Из курса алгебры известно, что собственные значения и собственные векторы действительной матрицы могут быть комплекснозначными. Так и в случае задачи Штурма-Лиувилля, вообще говоря, возможно появление комплекснозначных собственных значений и собственных функций. Поэтому мы должны рассматривать комплекснозначные значения параметра λ и комплекснозначные решения задачи (3.33)-(3.35).

Установим некоторые свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма-Лиувилля.

Теорема 3.3.1. *Все собственные функции и собственные значения задачи Штурма-Лиувилля действительны.*

Доказательство. Пусть λ_1 – собственное значение, а $y_1(x)$ – соответствующая ему собственная функция. Предположим, что они комплекснозначные, то есть $\lambda_1 = a + ib$, $y_1(x) = u(x) + iv(x)$. Так как функция

$y_1(x)$ является решением уравнения (3.33), то $Ly_1 = -\lambda_1 y_1(x)$. Записывая это равенство отдельно для действительных и мнимых частей, получим

$$Lu = -au(x) + bv(x), \tag{3.36}$$

$$Lv = -bu(x) - av(x). \tag{3.37}$$

Так как функция $y_1(x)$ удовлетворяет краевым условиям (3.34), (3.35), то и функции $u(x)$, $v(x)$ удовлетворяют этим краевым условиям.

Умножим уравнение (3.36) на $v(x)$, а уравнение (3.37) на $u(x)$, проинтегрируем затем оба уравнения от 0 до l и вычтем из первого второе. В результате получим

$$\int_0^l \big(v(x)Lu - u(x)Lv\big)dx = b\int_0^l \big(u^2(x) + v^2(x)\big)dx.$$

Применяя следствие из формулы Грина

$$\int_0^l \big(v(x)Lu - u(x)Lv\big)dx = 0, \tag{3.38}$$

имеем

$$b\int_0^l \big(u^2(x) + v^2(x)\big)dx = 0.$$

Следовательно, $b = 0$. Значит λ_1 действительно и $y_1(x)$ также действительна. □

Теорема 3.3.2. *Каждому собственному значению соответствует только одна собственная функция.*

Доказательство. Пусть собственному значению λ соответствуют две собственные функции $y_1(x)$, $y_2(x)$. Это значит, что они являются решениями уравнения (3.33) и удовлетворяют краевым условиям (3.34), (3.35). Из краевого условия (3.34) следует, что определитель Вронского $W[y_1, y_2](0) = 0$. Так как $y_1(x)$, $y_2(x)$ – решения одного и того же линейного однородного дифференциального уравнения (3.33), то $y_2(x) = cy_1(x)$. □

Введем скалярное произведение функций $v(x)$ и $w(x)$

$$(v, w) = \int\limits_0^l v(x)w(x)dx.$$

Будем называть функции $v(x)$ и $w(x)$ *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю, то есть $(v, w) = 0$.

Теорема 3.3.3. *Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, являются ортогональными.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$ – различные собственные значения, а $y_1(x)$, $y_2(x)$ – соответствующие им собственные функции. Так как $y_1(x)$, $y_2(x)$ удовлетворяют краевым условиям (3.34), (3.35), то из следствия из формулы Грина (3.16) получим, что

$$(Ly_1, y_2) - (y_1, Ly_2) = \int\limits_0^l \big(y_2(x)Ly_1 - y_1(x)Ly_2\big)dx = 0.$$

Так как $Ly_1 = -\lambda_1 y_1(x)$, $Ly_2 = -\lambda_2 y_2(x)$, то

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(y_1, y_2) = \lambda_1(y_1, y_2) - \lambda_2(y_1, y_2) =$$
$$= (\lambda_1 y_1, y_2) - (y_1, \lambda_2 y_2) = -(Ly_1, y_2) + (y_1, Ly_2) = 0.$$

Следовательно, $(\lambda_1 - \lambda_2)(y_1, y_2) = 0$, а значит $(y_1, y_2) = 0$ и функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ ортогональны. □

Теорема 3.3.4. *Пусть* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. *Тогда, если* λ *– собственное значение, то*

$$\lambda \geqslant \min_{0 \leqslant x \leqslant l} q(x). \tag{3.39}$$

Доказательство. Предположим, что λ_1 – собственное значение, $y_1(x)$ – соответствующая собственная функция и

$$\lambda_1 < \min_{0 \leqslant x \leqslant l} q(x).$$

Тогда $q(x) - \lambda_1 > 0$ на отрезке $[0, l]$. Из уравнения (3.33) следует, что

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy_1}{dx}\right) = (-\lambda_1 + q(x))y_1(x).$$

Интегрируя от 0 до x, получим

$$p(x)y_1'(x) = p(0)y_1'(0) + \int_0^x (q(s) - \lambda_1)y_1(s)ds. \tag{3.40}$$

Так как $y_1(x)$ удовлетворяет краевым условиям (3.34), (3.35) и $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то $y_1(0) = y_1(l) = 0$. Так как $y_1(x)$ – ненулевое решение (3.33), то $y_1'(0) \neq 0$. Пусть для определенности $y_1'(0) > 0$. Тогда $y_1'(x) > 0$ при $x \in [0, l]$. Предположим, что это не так. Обозначим через x_0 минимальное число, при котором $y_1'(x_0) = 0$. Тогда для $x \in [0, x_0)$ производная $y_1'(x) > 0$, а значит и $y_1(x) > 0$ при $x \in (0, x_0)$. Положив в (3.40) $x = x_0$ и учитывая положительность $q(x) - \lambda_1$, получим, что $y_1'(x_0) > 0$. Это противоречие доказывает положительность $y_1'(x)$ при $x \in [0, l]$. Но тогда $y_1(x) > 0$ при $x \in (0, l]$, что противоречит краевому условию $y_1(l) = 0$. Следовательно, исходное предположение неверно и неравенство (3.39) доказано. □

Рассмотрим простой пример задачи Штурма-Лиувилля.

Пример 3.3.1. *Пусть $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $l = \pi$. Тогда задача Штурма-Лиувилля приобретает следующий вид*

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \tag{3.41}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0. \tag{3.42}$$

Требуется найти собственные значения и собственные функции этой задачи.

Пусть $\lambda = -\mu$ меньше нуля. Тогда общее решение уравнения (3.41) имеет вид

$$y(x) = c_1 \exp\{\sqrt{\mu}x\} + c_2 \exp\{-\sqrt{\mu}x\}.$$

Положив $x = 0$, $x = l$ и использовав краевые условия (3.42), получим систему уравнений для определения c_1 и c_2

$$\begin{gathered} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 \exp\{\sqrt{\mu}\pi\} + c_2 \exp\{-\sqrt{\mu}\pi\} = 0, \end{gathered}$$

из которой следует, что $c_1 = c_2 = 0$. Таким образом отрицательные λ не являются собственными значениями. Отметим, что этот факт следует из теоремы 3.3.4. Легко видеть, что $\lambda = 0$ также не является собственным значением.

Пусть λ больше нуля. Тогда общее решение уравнения (3.41) имеет вид

$$y(x) = c_1 \sin \sqrt{\lambda} x + c_2 \cos \sqrt{\lambda} x.$$

Из краевого условия в нуле следует, что $c_2 = 0$. Тогда из краевого условия в π получим уравнение для определения собственных значений $\sin \sqrt{\lambda}\pi = 0$. Его решениями являются собственные значения

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Соответствующие им собственные функции

$$y_n(x) = c \sin nx,$$

где c – произвольная отличная от нуля постоянная.

3.3.1. Теорема Стеклова

Сформулируем теорему, подчеркивающую важность задачи Штурма-Лиувилля.

Рассмотрим собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (3.33)-(3.35). Можно показать, что их счетное число. Следовательно все их можно занумеровать $y_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$. Чтобы устранить неопределенность, связанную с тем, что они содержат произвольный сомножитель, будем считать, что

$$\int_0^l (y_n(x))^2 dx = 1.$$

Пусть $f(x)$ некоторая непрерывная на $[0, l]$ функция. Введем обозначение

$$f_n = \int_0^l f(x) y_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Сформулируем теорему, имеющую важное значение во многих областях математики и ее приложений.

Теорема 3.3.5. *(Теорема Стеклова) Если $f(x) \in C^2[0, l]$ и удовлетворяет краевым условиям (3.34), (3.35), то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x)$$

сходится равномерно на отрезке $[0, l]$ к функции $f(x)$, то есть

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

14. Первые интегралы (ПИ) нормальной системы ОДУ, производная в силу системы. Теорема о представлении решения задачи Коши с помощью функционально независимых ПИ.

4.1. Первые интегралы нормальной системы

4.1.1. Определение первого интеграла

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = f_1(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)), \\ \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} = f_n(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)), \end{cases} \tag{4.1}$$

где функции $f_i(t, \overline{x})$ являются непрерывными в области $D_1 \in \mathbb{R}^{n+1}$ вместе со всеми частными производными $\partial f_i(t, \overline{x})/\partial x_j$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Обозначим через $C^1(D_1)$ множество непрерывно дифференцируемых в D_1 функций.

Определение 4.1.1. *Первым интегралом системы (4.1) в области D_1 называется функция $v(t, x_1, \ldots, x_n) \in C^1(D_1)$, сохраняющая постоянное значение вдоль каждой лежащей в D_1 интегральной кривой системы (4.1).*

Таким образом, для каждого решения $\overline{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ системы (4.1) найдется константа C такая, что

$$v(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \equiv C. \tag{4.2}$$

В физических моделях первые интегралы возникают как отражения различных законов сохранения (энергии, импульса и т.д.).

4.1.2. Производная первого интеграла в силу системы

Дадим определение производной в силу системы для общего случая нормальной системы (4.1).

Определение 4.1.2. *Производной функции $v(t, x_1, \ldots, x_n) \in C^1(D_1)$ в силу системы (4.1) называется функция*

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(4.1)} = \frac{\partial v(t,\overline{x})}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(t,\overline{x})}{\partial x_j} f_j(t,\overline{x}), \quad (t,\overline{x}) \in D_1.$$

Лемма 4.1.1. *Функция $v(t, x_1, \ldots, x_n) \in C^1(D_1)$ является первым интегралом системы (4.1) в области D_1 тогда и только тогда, когда ее производная в силу системы (4.1) равна нулю в D_1:*

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(4.1)} = 0, \quad \forall (t,\overline{x}) \in D_1. \tag{4.3}$$

Доказательство. Пусть функция $v(t, x_1, \ldots, x_n) \in C^1(D_1)$ является первым интегралом системы (4.1) в области D_1. Тогда на лежащей в D_1 интегральной кривой $(t, \overline{x}(t))$, где $\overline{x}(t)$ – решение (4.1), справедливо равенство (4.2). Дифференцируя (4.2) почленно по t и подставляя выражения для производных $dx_j(t)/dt$ из (4.1), имеем

$$0 \equiv \frac{\partial v(t,\overline{x}(t))}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(t,\overline{x}(t))}{\partial x_j} \frac{dx_j(t)}{dt} =$$
$$= \frac{\partial v(t,\overline{x}(t))}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(t,\overline{x}(t))}{\partial x_j} f_j(t,\overline{x}(t)).$$

Таким образом, производная в силу системы (4.1) равна нулю вдоль интегральной кривой. Так как через любую точку $(t_0, \overline{x}_0) \in D_1$ по теореме существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы (4.1) с начальным условием $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0$ проходит единственная интегральная кривая, то (4.3) выполнено для любой точки D_1.

Обратно, пусть для некоторой функции $v(t, x_1, \ldots, x_n) \in C^1(D_1)$ справедливо (4.3). В частности, (4.3) будет выполнено и на любой интегральной кривой $(t, \overline{x}(t)) \in D_1$. Тогда

$$0 \equiv \frac{\partial v(t, \overline{x}(t))}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(t, \overline{x}(t))}{\partial x_j} f_j(t, \overline{x}(t)) =$$

$$= \frac{\partial v(t, \overline{x}(t))}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(t, \overline{x}(t))}{\partial x_j} \frac{dx_j(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\big(v(t, \overline{x}(t))\big).$$

Производная непрерывно дифференцируемой функции $v(t, \overline{x}(t))$ скалярного аргумента t равна нулю только когда функция является константой, то есть $v(t, \overline{x}(t)) \equiv C$. Поэтому $v(t, \overline{x})$ – первый интеграл системы (4.1). □

4.1.3. Геометрический смысл первого интеграла

Пусть функция $v(t, x_1, \ldots, x_n) \in C^1(D_1)$ является первым интегралом системы (4.1) в области D_1, C_0 – любое значение, которое эта функция принимает в D_1, и для некоторого $j \in \{1, \ldots, n\}$ производная $\partial v(t, \overline{x})/\partial x_j \neq 0$ в D_1. Покажем, что уравнение $v(t, x_1, \ldots, v_n) = C_0$ определяет в $\mathbb{R}^{n+1}$ n-мерную поверхность, целиком состоящую из интегральных кривых системы (4.1). Пусть точка $(t_0, \overline{x}_0) \in D_1$ лежит на поверхности

$$v(t, \overline{x}) = C_0,$$

то есть $v(t_0, \overline{x}_0) = C_0$. В силу теоремы существования и единственности решения задачи Коши для системы (4.1) с начальным условием $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0$ существует единственная интегральная кривая $(t, \overline{x}(t))$, проходящая через точку $(t_0, \overline{x}_0)$. Так как $v(t, \overline{x})$ – первый интеграл, то на рассматриваемой интегральной кривой справедливы равенства

$$v(t, \overline{x}(t)) = v(t_0, \overline{x}(t_0)) = v(t_0, \overline{x}_0) = C_0,$$

показывающие, что при всех допустимых $t \neq t_0$ интегральная кривая остается на поверхности $v(t, \overline{x}) = C_0$.

4.1.4. Независимые первые интегралы

Пусть $v_1(t,\overline{x}),\ldots,v_k(t,\overline{x})$ – первые интегралы системы (4.1). Тогда для любой непрерывно дифференцируемой в $\mathbb{R}^k$ функции $\varphi(y_1,\ldots,y_k)$

суперпозиция

$$\Phi(t,\overline{x})=\varphi(v_1(t,\overline{x}),\ldots,v_k(t,\overline{x}))$$

также является первым интегралом системы (4.1).

Определение 4.1.3. *Первые интегралы $v_1(t,\overline{x}),\ldots,v_k(t,\overline{x})$ системы (4.1) называются* ***функционально независимыми*** *в области D_1, если ранг матрицы производных равен количеству функций k:*

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial v_i(t,\overline{x})}{\partial x_j}\right)=k,\quad \forall(t,\overline{x})\in D_1.$$

Важность функционально независимых интегралов для решения нормальной системы проясняет следующая теорема.

Теорема 4.1.1. *Пусть в области D_1 существует n функционально независимых первых интегралов $v_1(t,\overline{x}),\ldots,v_n(t,\overline{x})$ системы (4.1). Тогда для любой точки $(t_0,\overline{x}_0)\in D_1$ решение $\overline{x}(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))$ задачи Коши*

$$\frac{dx_k(t)}{dt}=f_k(t,x_1(t),\ldots,x_n(t)),\quad k=1,\ldots,n,\quad \overline{x}(t_0)=\overline{x}_0 \tag{4.4}$$

dt

однозначно определяется как неявная функция из системы уравнений

$$\begin{cases} v_1(t, \overline{x}) = c_1^0, \\ \quad\vdots \\ v_n(t, \overline{x}) = c_n^0, \end{cases} \tag{4.5}$$

где $c_j^0 = v_j(t_0, \overline{x}_0),\ j = 1, \ldots, n.$

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений (4.5) в окрестности точки $(t_0, \overline{x}_0)$. В самой точке уравнения очевидно удовлетворяются, причем в силу функциональной независимости первых интегралов (см. определение 4.1.3 при $k = n$) якобиан по переменным $(x_1, \ldots, x_n)$ отличен от нуля:

$$\det\left(\frac{\partial v_i(t_0, \overline{x}_0)}{\partial x_j}\right) \neq 0.$$

Тогда по теореме о неявных функциях (см. теорему А.1.1 в дополнении) в некоторой окрестности точки t_0 существуют непрерывно дифференцируемые функции

$$x_j(t) = g_j(t, c_1^0, \ldots, c_n^0), \quad j = 1, \ldots, n$$

такие, что при подстановке $\overline{g}(t) = (g_1(t), \ldots, g_n(t))$ в (4.5) получается тождество:

$$\begin{cases} v_1(t, \overline{g}(t)) = c_1^0, \\ \quad\vdots \\ v_n(t, \overline{g}(t)) = c_n^0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Пусть $\overline{x}(t)$ – решение задачи Коши (4.4). По определению первых интегралов имеем

$$v_j(t, \overline{x}(t)) = v_j(t_0, \overline{x}(t_0)) = v_j(t_0, \overline{x}_0) = c_j^0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, $\overline{x}(t)$ удовлетворяет той же самой системе функциональных уравнений (4.6), что и $\overline{g}(t)$. В силу единственности неявной функции в окрестности t_0 найденные функции совпадают: $\overline{x}(t) \equiv \overline{g}(t)$. □

Имеет место следующее утверждение, которое мы приводим без доказательства.

Теорема 4.1.2. *В случае автономной системы (4.1), то есть*

$$f_j = f_j(\overline{x}), \quad j = 1, \ldots, n,$$

в окрестности любой точки $\overline{x}_0$, для которой

$$\sum_{j=1}^{n} f_j^2(\overline{x}_0) \neq 0,$$

существует ровно $(n-1)$ не содержащих переменную t функционально независимых первых интегралов системы (4.1).

4.2. Уравнения в частных производных первого порядка

4.2.1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

Пусть $u(\overline{x}) = u(x_1, \ldots, x_n)$ – функция от $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D_0$, D_0 – область в $\mathbb{R}^n$. Уравнение

$$F\Big(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big) = 0$$

Определение 4.2.1. *Функция $u(\overline{x})$ называется решением квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка в области $D_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, если*

1. $u(\overline{x})$ непрерывно дифференцируема в D_0 (то есть $u(\overline{x}) \in C^1(D_0)$);

2. для любого $\overline{x} \in D_0$ точка $(\overline{x}, u(\overline{x})) \in D_1$;

3. при подстановке функции $u(\overline{x})$ в обе части квазилинейного уравнения получается тождество в области D_0.

15. Линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка. Связь решения с первым интегралом. Теорема об общем решении.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка в области $D_0 \subset \mathbb{R}^n$

$$a_1(\overline{x})\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(\overline{x})\frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(\overline{x})\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \tag{4.7}$$

$$a_j(\overline{x}) \in C^1(D_0),\ j = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j^2(\overline{x}) \neq 0, \quad \forall \overline{x} \in D_0. \tag{4.8}$$

По коэффициентам уравнения (4.7) построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = a_1(x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} = a_n(x_1(t), \dots, x_n(t)). \end{cases} \tag{4.9}$$

Определение 4.2.2. *Решения $\overline{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ системы (4.9) определяют фазовые кривые в пространстве $\mathbb{R}^n$, которые называются* характеристиками *уравнения в частных производных (4.7).*

Связь системы (4.9) и уравнения (4.7) проясняется в следующей лемме.

Связь системы (4.9) и уравнения (4.7) проясняется в следующей лемме.

Лемма 4.2.1. *Функция $u(\overline{x}) \in C^1(D_0)$ является решением линейного однородного уравнения в частных производных (4.7) тогда и только тогда, когда $u(\overline{x})$ является не содержащим t первым интегралом системы (4.9) в области D_0.*

Доказательство. Пусть $u(\overline{x})$ является не содержащим t первым интегралом системы (4.9) в области D_0. Тогда по лемме 4.1.1 о свойствах первого интеграла его производная в силу системы (4.9) равна нулю в области D_0:

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{(4.9)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_j} a_j(\overline{x}) = 0, \quad \forall \overline{x} \in D_0.$$

Поэтому $u(\overline{x})$ – решение уравнения в частных производных (4.7).

Обратно, пусть $u(\overline{x})$ – решение уравнения в частных производных (4.7). Тогда его левая часть представляет собой выражение для производной $u(\overline{x})$ в силу системы (4.9), и это выражение равно нулю в области D_0. Согласно лемме 4.1.1 отсюда заключаем, что $u(\overline{x})$ является первым интегралом (4.9) в области D_0. $\square$

Теорема 4.2.1. *Пусть в области D_0 система (4.9) имеет ровно $n-1$ не содержащих t функционально независимых первых интегралов*

$$v_1(x_1, \ldots, x_n), \quad v_2(x_1, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad v_{n-1}(x_1, \ldots, x_n).$$

Тогда в некоторой окрестности произвольной точки $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D_0$ общее решение линейного однородного уравнения в частных производных (4.7) имеет вид

$$u(\overline{x}) = F(v_1(\overline{x}), v_2(\overline{x}), \ldots, v_{n-1}(\overline{x})), \tag{4.10}$$

где $F(y_1, \ldots, y_{n-1})$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Доказательство. Если $v_j(\overline{x})$ – первые интегралы системы (4.9), $j = 1, \ldots, n-1$, то для любой непрерывно дифференцируемой функции $F(y_1, \ldots, y_{n-1})$ функция $u(\overline{x})$, определенная формулой (4.10), также является первым интегралом, не зависящим от t. Тогда по лемме 4.2.1 $u(\overline{x})$ – решение линейного однородного уравнения в частных производных (4.7).

Убедимся, что формулой (4.10) описываются все решения линейного однородного уравнения (4.7) в окрестности каждой точки $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D_0$. Пусть $u(\overline{x})$ – произвольное фиксированное решение уравнения (4.10). Так как функции $v_1(\overline{x}), \ldots, v_{n-1}(\overline{x})$ являются первыми интегралами системы (4.9), то согласно лемме 4.2.1 эти функции являются решениями уравнения (4.7). Таким образом,

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j(\overline{x}) \frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_j} = 0, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j(\overline{x}) \frac{\partial v_1(\overline{x})}{\partial x_j} = 0, \\ \qquad\vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j(\overline{x}) \frac{\partial v_{n-1}(\overline{x})}{\partial x_j} = 0, \end{array} \right. \qquad \forall \overline{x} \in D_0. \tag{4.11}$$

В силу условия (4.8) в каждой точке $\overline{x} \in D_0$ система (4.11) представляет собой имеющую нетривиальное решение $a_1(\overline{x}), \dots, a_n(\overline{x})$ однородную систему линейных алгебраических уравнений. Тогда определитель этой системы, представляющий собой определитель функциональной матрицы, равен нулю

$$\frac{D(u, v_1, \dots, v_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = 0, \quad \forall \overline{x} \in D_0.$$

При этом в силу функциональной независимости $v_1(\overline{x}), \dots, v_{n-1}(\overline{x})$ соответствующий минор порядка $(n-1)$ отличен от нуля. Тогда по теореме о функциональных матрицах в окрестности каждой точки M_0 найдется непрерывно дифференцируемая функция $F(y_1, \dots, y_{n-1})$ такая, что в окрестности M_0 справедливо равенство (4.10). $\square$

16. Квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка. Характеристики. Теорема о неявном определении решения через первый интеграл.

4.2.3. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка

Рассмотрим квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка в области $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

$$a_1(\overline{x}, u(\overline{x}))\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(\overline{x}, u(\overline{x}))\frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots \\ \dots + a_n(\overline{x}, u(\overline{x}))\frac{\partial u}{\partial x_n} = b(\overline{x}, u(\overline{x})), \quad (4.12)$$

$$a_j(\overline{x}, u),\, b(\overline{x}, u) \in C^1(D), \quad j = 1, \dots, n,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2(\overline{x}, u) \neq 0, \quad \forall (\overline{x}, u) \in D.$$

По коэффициентам и правой части уравнения (4.12) построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений $(n+1)$-го порядка.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1(\overline{x}, u), \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_n(\overline{x}, u), \\ \dfrac{du}{dt} = b(\overline{x}, u). \end{cases} \qquad (4.13)$$

Определение 4.2.3. *Решения* $(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t))$ *системы (4.13) определяют фазовые кривые в пространстве* $\mathbb{R}^{n+1}$, *которые называются характеристиками уравнения в частных производных (4.12).*

Связь первых интегралов системы (4.13) и квазилинейного уравнения (4.12) проясняется в следующей теореме.

Теорема 4.2.2. *Пусть* $v(\overline{x}, u)$ *– не содержащий* t *первый интеграл системы (4.13) в области* D, *и в некоторой точке* $N_0(x_1^0, \dots, x_n^0, u^0) \in D$ *выполнены условия*

$$v(N_0) = C_0, \quad \frac{\partial v(N_0)}{\partial u} \neq 0. \tag{4.14}$$

Тогда в некоторой окрестности точки N_0 *уравнение*

$$v(x_1, \dots, x_n, u) = C_0 \tag{4.15}$$

определяет неявную функцию $u = u(x_1, \dots, x_n)$, *являющуюся решением квазилинейного уравнения (4.12).*

Доказательство. Пусть $v(\overline{x}, u)$ является не содержащим t первым интегралом системы (4.13). Тогда по лемме 4.1.1 о свойствах первого интеграла его производная в силу системы (4.13) равна нулю в области D:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(4.13)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(\overline{x}, u)}{\partial x_j} a_j(\overline{x}, u) + \frac{\partial v(\overline{x}, u)}{\partial u} b(\overline{x}, u) = 0, \quad \forall (\overline{x}, u) \in D. \tag{4.16}$$

Для функционального уравнения (4.15) в силу (4.14) по теореме о неявной функции существует окрестность точки $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$, в которой определена непрерывно дифференцируемая функция $u = u(x_1, \dots, x_n)$, обращающая уравнение (4.15) в тождество в этой окрестности:

$$v(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n)) \equiv C_0.$$

По формуле дифференцирования неявной функции имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x_j} = -\frac{\partial v}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

После подстановки этих равенств в (4.16) и деления на $\partial v/\partial u \neq 0$ приходим к равенству

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(\overline{x}, u(\overline{x}))\frac{\partial u}{\partial x_j} = b(\overline{x}, u(\overline{x}))$$

в рассматриваемой окрестности точки M_0. То есть $u(\overline{x})$ – решение квазилинейного уравнения в частных производных (4.12). $\square$

Система характеристик квазилинейного уравнения в частных производных (4.13) имеет порядок $(n+1)$. Поэтому, согласно теореме 4.1.2 о первых интегралах автономной системы, в окрестности каждой точки области D существует ровно n не содержащих t функционально независимых первых интегралов

$$v_1(\overline{x}, u), \quad \ldots, \quad v_n(\overline{x}, u).$$

Тогда для любой непрерывно дифференцируемой функции $F(y_1, \ldots, y_n)$ суперпозиция

$$w(\overline{x}, u) = F(v_1(\overline{x}, u), \ldots, v_n(\overline{x}, u))$$

также является первым интегралом системы характеристик (4.13). В силу теоремы 4.2.2 при выполнении условия $\partial w/\partial u \neq 0$ неявная функция $u(\overline{x})$, полученная из функционального уравнения

$$F(v_1(\overline{x}, u), \ldots, v_n(\overline{x}, u)) = 0, \tag{4.17}$$

также является решением квазилинейного уравнения в частных производных (4.12). Можно показать, что формула (4.17) задает общее решение квазилинейного уравнения в частных производных (4.12) в окрестности каждой точки N_0.

4.2.4. Геометрический смысл квазилинейного уравнения в частных производных

График решения $u = f(x_1, \ldots, x_n) \in C^1(D_0)$ квазилинейного уравнения в частных производных (4.12) является n-мерной поверхностью в пространстве $(x_1, \ldots, x_n, u)$. Уточним структуру этой поверхности.

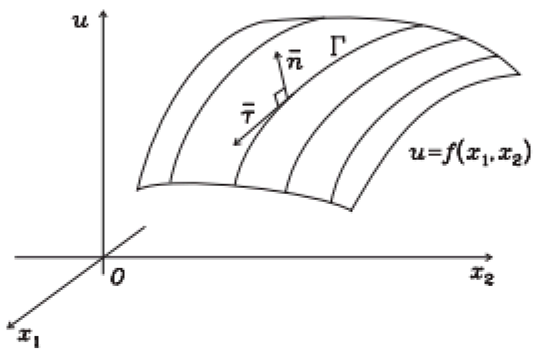


Рис. 4.1. К доказательству теоремы 4.2.3.

Теорема 4.2.3. *Функция $u = f(x_1, \ldots, x_n) \in C^1(D_0)$ является решением квазилинейного уравнения в частных производных (4.12) тогда и только тогда, когда задаваемая этой функцией поверхность целиком состоит из характеристик, определяемых системой (4.13) (то есть через любую точку поверхности проходит характеристика, целиком лежащая на этой поверхности).*

Доказательство. Пусть через любую точку поверхности

$$\mathcal{P} = \{u = f(x_1, \ldots, x_n), (x_1, \ldots, x_n) \in D_0\}, \tag{4.18}$$

задаваемой с помощью некоторой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in C^1(D_0)$, проходит характеристика

$$\Gamma = \{(x_1(t), \ldots, x_n(t), u(t))\} \subset \mathcal{P},$$

целиком лежащая на этой поверхности. В каждой точке характеристики ее касательный вектор в силу (4.13) имеет вид

$$\overline{\tau} = \Big(\frac{dx_1(t)}{dt}, \ldots, \frac{dx_n(t)}{dt}, \frac{du(t)}{dt}\Big) = \\ = (a_1(\overline{x}(t), u(t)), \ldots, a_n(\overline{x}(t), u(t)), b(\overline{x}(t), u(t))),$$

где $u(t) = f(\overline{x}(t))$. Поскольку характеристика лежит на поверхности $\mathcal{P}$, то построенный вектор $\overline{\tau}$ является касательным одновременно и к поверхности $\mathcal{P}$. Тогда этот вектор ортогонален к вектору нормали

$$\overline{n} = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}(t)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}(t)), -1\Big).$$

Так как $(\overline{\tau}, \overline{n})_{\mathbb{R}^{n+1}} = 0$, то

$$a_1(\overline{x}, u)\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}) + \dots + a_n(\overline{x}, u)\frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}) - b(\overline{x}, u) = 0, \quad \forall(\overline{x}, u) \in \Gamma. \quad (4.19)$$

Полученное равенство показывает, что $u = f(\overline{x})$ удовлетворяет квазилинейному уравнению в частных производных (4.12) в каждой точке характеристики Γ. Поскольку по условию через каждую точку поверхности проходит некоторая характеристика, то (4.12) выполнено во всех точках D_0.

Обратно, пусть $u = f(\overline{x})$ – решение квазилинейного уравнения в частных производных (4.12) в D_0. Покажем, что через любую точку $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0, u^0) \in \mathcal{P}$ проходит лежащая в $\mathcal{P}$ характеристика с касательным вектором $\overline{\tau}(x_1^0, \dots, x_n^0, u^0)$. Рассмотрим задачу Коши с начальными данными $(x_1^0, \dots, x_n^0)$,

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1(\overline{x}, f(\overline{x})), \quad x_1(t_0) = x_1^0, \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_n(\overline{x}, f(\overline{x})), \quad x_n(t_0) = x_n^0, \end{cases} \quad (4.20)$$

которая имеет единственное решение $\overline{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. По этому решению построим кривую

$$\Gamma = \{(x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t), u(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t)))\}. \quad (4.21)$$

По построению $\Gamma \subset \mathcal{P}$. Убедимся, что Γ – характеристика, то есть удовлетворяет системе (4.13). Первые n уравнений этой системы выполнены в силу (4.20). Осталось проверить последнее равенство в (4.13). Учитывая то, что $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, являются решениями системы (4.20), а $u = f(\overline{x})$ является решением квазилинейного уравнения (4.12), имеем

$$\frac{du}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{x}(t)) \cdot \frac{dx_j}{dt}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\overline{x}(t))}{\partial x_j} a_j(\overline{x}(t), u(t)) = b(\overline{x}(t), u(t)).$$

Следовательно, кривая Γ – характеристика. Итак, показано, что через любую точку поверхности $\mathcal{P}$ проходит принадлежащая этой поверхности характеристика Γ. $\square$

4.2.5. Задача Коши для квазилинейного уравнения в частных производных

Рассмотрим в случае $n = 2$, который имеет наиболее наглядную геометрическую интерпретацию, квазилинейное уравнение в частных производных

$$a_1(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = b(x, y, u), \tag{4.22}$$

где $b(x, y, u), a_j(x, y, u) \in C^1(D)$, $j = 1, 2$, D – область из $\mathbb{R}^3$,

$$a_1^2(x, y, u) + a_2^2(x, y, u) \neq 0, \quad \forall (x, y, u) \in D.$$

Задача Коши для квазилинейного уравнения в частных производных (4.22) состоит в нахождении поверхности $u = f(x, y)$, задаваемой решением квазилинейного уравнения в частных производных (4.22) и проходящей через заданную линию

$$\ell = \{(x, y, u) = (\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s)),\ s \in [s_1, s_2]\} \subset D,$$

то есть

$$\psi_3(s) = f(\psi_1(s), \psi_2(s)), \quad \forall s \in [s_1, s_2]. \tag{4.23}$$

Теорема 4.2.4. *Пусть выполнено условие*

$$\det \begin{pmatrix} a_1(s) & \psi_1'(s) \\ a_2(s) & \psi_2'(s) \end{pmatrix} \neq 0, \quad \forall s \in [s_1, s_2], \tag{4.24}$$

где $a_j(s) = a_j(\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s))$, $j = 1, 2$.

Тогда в некоторой окрестности каждой точки линии ℓ существует единственное решение задачи Коши (4.22), (4.23).

Доказательство. Рассмотрим систему характеристик для квазилинейного уравнения в частных производных (4.22):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1(x, y, u), \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = a_2(x, y, u), \\[2mm] \dfrac{du}{dt} = b(x, y, u). \end{cases} \tag{4.25}$$

ч

вычислим значения частных производных на линии ℓ, то есть при $t = 0$. В силу (4.25) имеем

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}(0,s) = \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=0} = a_1(s), \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}(0,s) = \frac{dy}{dt}\bigg|_{t=0} = a_2(s).$$

Из равенств (4.26) находим, что

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial s}(0,s) = \psi_1'(s), \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial s}(0,s) = \psi_2'(s).$$

Тогда для якобиана в силу условия (4.24) справедливо соотношение

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial s} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial s} \end{pmatrix}(0,s) = \det\begin{pmatrix} a_1(s) & \psi_1'(s) \\ a_2(s) & \psi_2'(s) \end{pmatrix} \neq 0, \quad \forall s \in [s_1, s_2].$$

Следовательно, по теореме о неявных функциях в окрестности точки $(x_0, y_0) = (\varphi_1(0,s), \varphi_2(0,s))$ существуют единственным образом определенные непрерывно дифференцируемые функции

$$t = t(x,y), \quad s = s(x,y),$$

обращающие уравнения (4.29) в тождества. После подстановки в третье уравнение в (4.27) приходим к искомому представлению

$$u = \varphi_3(t(x,y), s(x,y)) = f(x,y).$$

Единственность вытекает из того, что удовлетворяющая квазилинейному уравнению в частных производных поверхность, согласно теореме 4.2.3, состоит из характеристик (то есть выполнены соотношения (4.27)), а вблизи кривой ℓ единственность решений обеспечивается теоремой о неявных функциях. $\square$

Условие (4.24) имеет следующий геометрический смысл. Так как вектор $\overline{\tau} = (a_1, a_2, b)$ касается характеристики, а вектор $(\psi_1', \psi_2', \psi_3')$ касается кривой ℓ, на которой задаются начальные данные для задачи Коши, то условие (4.24) есть условие неколлинеарности проекций (a_1, a_2) и (ψ_1', ψ_2') рассматриваемых векторов на плоскость (x, y). Другими словами, проекции линии ℓ и пересекающих ее характеристик не должны касаться друг друга (см. рис. 4.2).

17. Квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка. Теорема о необходимом и достаточном условии для решения уравнения. (ПОСМОТРИ 16)

18. Функционалы, примеры. Вариация функционала. Необходимое условие экстремума функционала. Основная лемма вариационного исчисления.

Рассмотрим множество M, являющееся некоторым подмножеством множества непрерывных на отрезке функций $C[x_0, x_1]$.

Определение 5.1.1. *Функционалом называется отображение множества M в множество действительных чисел.*

Приведем некоторые примеры.

Пусть множество M совпадает со всем множеством $C[x_0, x_1]$. Определим функционал $\Phi[y(x)]$ следующим образом: $\Phi[y(x)] = y(x_0) + 2y(x_1)$. Другим примером функционала, определенного на этом множестве, является

$$\Phi[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} y(x)dx.$$

Приведем еще один пример. Пусть множество M представляет собой множество непрерывно дифференцируемых на отрезке $[x_0, x_1]$ функций таких, что $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, где y_0, y_1 – заданные постоянные. Определим на этом множестве функционал

$$\Phi[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} \big(y(x) + 2(y'(x))^2\big)dx.$$

Определение 5.1.2. *Допустимой вариацией функции $y_0(x) \in M$ называется любая функция $\delta y(x)$ такая, что $y_0(x) + \delta y(x) \in M$.*

Далее для простоты будем считать, что множество M обладает тем свойством, что если $\delta y(x)$ – допустимая вариация функции $y_0(x)$, то $t\delta y(x)$ также является допустимой вариацией функции $y_0(x)$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Определение 5.1.3. *Вариацией $\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)]$ функционала $\Phi[y(x)]$ на функции $y_0(x) \in M$ называется*

$$\frac{d}{dt}\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0}.$$

Определение 5.1.4. *Функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x) \in M$ глобального минимума (максимума) на множестве M, если для любой $y(x) \in M$ выполнено неравенство $\Phi[y_0(x)] \leqslant \Phi[y(x)]$ ($\Phi[y_0(x)] \geqslant \Phi[y(x)]$).*

Пусть на множестве M введена некоторая норма функции $y(x)$, например

$$\|y(x)\| = \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} |y(x)|.$$

Определение 5.1.5. *Функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x) \in M$ локального минимума (максимума) на множестве M, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любой $y(x) \in M$ и удовлетворяющей неравенству $\|y(x) - y_0(x)\| < \varepsilon$, справедливо $\Phi[y_0(x)] \leqslant \Phi[y(x)]$ ($\Phi[y_0(x)] \geqslant \Phi[y(x)]$).*

Максимумы и минимумы функционала называются *экстремумами* функционала. Задачи отыскания экстремумов функционалов и функций, на которых они достигаются, называются задачами вариационного исчисления.

Докажем теорему о необходимом условии экстремума функционала.

Теорема 5.1.1. *Если функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x) \in M$ локального максимума или минимума на множестве M и вариация функционала на $y_0(x)$ существует, то вариация функционала $\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)]$ равна нулю для любой допустимой вариации $\delta y(x)$.*

Доказательство. Пусть функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x)$ локального экстремума. Рассмотрим $\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]$, где $\delta y(x)$ произвольная вариация $y_0(x)$. При фиксированных $y_0(x)$ и $\delta y(x)$ функционал $\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]$ является функцией переменной t :

$$\varphi(t) = \Phi[y_0(x) + t\delta y(x)].$$

Так как функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x)$ локального экстремума, то у функции $\varphi(t)$ точка $t = 0$ является точкой локального экстремума. Следовательно, если производная $\varphi'(0)$ существует, то $\varphi'(0) = 0$. Существование производной $\varphi'(0)$ следует из существования вариации функционала $\Phi[y(x)]$ на $y_0(x)$

$$\frac{d}{dt}\varphi(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0}.$$

Следовательно,

$$\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt}\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0} = 0$$

для любой $\delta y(x)$. Теорема 5.1.1 доказана. $\square$

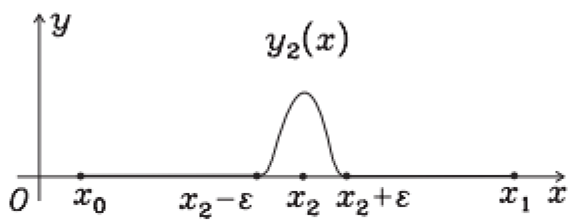


Рис. 5.1. К доказательству леммы 5.1.1.

Докажем лемму, которую в связи с ее важностью при исследовании задач вариационного исчисления, называют основной леммой вариационного исчисления.

Напомним, что $C^n[x_0, x_1]$, $n \in \mathbb{N}$ обозначает множество n раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[x_0, x_1]$ функций. Пусть $C_0^n[x_0, x_1]$ — множество функций $y(x) \in C^n[x_0, x_1]$ таких, что

$$y^{(m)}(x_0) = y^{(m)}(x_1) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$

Лемма 5.1.1. *Пусть $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[x_0, x_1]$ функция такая, что*

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)y(x)dx = 0$$

для любой $y(x) \in C_0^n[x_0, x_1]$. Тогда $f(x) \equiv 0$ на отрезке $[x_0, x_1]$.

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ отлична от нуля на отрезке $[x_0, x_1]$. Тогда существует точка $x_2 \in (x_0, x_1)$ такая, что $f(x_2) \neq 0$. Пусть для определенности $f(x_2) > 0$. В силу непрерывности $f(x)$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$f(x) \geqslant \frac{f(x_2)}{2} > 0, \quad \forall x \in [x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon] \subset (x_0, x_1).$$

Рассмотрим функцию $y_2(x)$ следующего вида (см. рис. 5.1):

$$y_2(x) = \begin{cases} (x - (x_2 - \varepsilon))^{n+1}((x_2 + \varepsilon) - x)^{n+1}, & x \in [x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon]; \\ 0, & x \notin [x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon]. \end{cases}$$

Функция $y_2(x) \in C_0^n[x_0, x_1]$ и $y_2(x) > 0$ при $x \in (x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon)$. Следовательно,

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)y_2(x)dx = \int\limits_{x_2-\varepsilon}^{x_2+\varepsilon} f(x)y_2(x)dx > 0,$$

что противоречит условию леммы. Лемма 5.1.1 доказана. $\square$

19. Теорема о необходимом условии экстремума для функционала, зависящего от первой производной. Уравнение Эйлера.

Определение 5.1.4. *Функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x) \in M$ глобального минимума (максимума) на множестве M, если для любой $y(x) \in M$ выполнено неравенство $\Phi[y_0(x)] \leqslant \Phi[y(x)]$ ($\Phi[y_0(x)] \geqslant \Phi[y(x)]$).*

Определение 5.1.5. *Функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x) \in M$ локального минимума (максимума) на множестве M, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любой $y(x) \in M$ и удовлетворяющей неравенству $\|y(x) - y_0(x)\| < \varepsilon$, справедливо $\Phi[y_0(x)] \leqslant \Phi[y(x)]$ ($\Phi[y_0(x)] \geqslant \Phi[y(x)]$).*

Максимумы и минимумы функционала называются *экстремумами* функционала. Задачи отыскания экстремумов функционалов и функций, на которых они достигаются, называются задачами вариационного исчисления.

Докажем теорему о необходимом условии экстремума функционала.

Теорема 5.1.1. *Если функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x) \in M$ локального максимума или минимума на множестве M и вариация функционала на $y_0(x)$ существует, то вариация функционала $\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)]$ равна нулю для любой допустимой вариации $\delta y(x)$.*

Доказательство. Пусть функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x)$ локального экстремума. Рассмотрим $\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]$, где $\delta y(x)$ произвольная вариация $y_0(x)$. При фиксированных $y_0(x)$ и $\delta y(x)$ функционал $\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]$ является функцией переменной t :

$$\varphi(t) = \Phi[y_0(x) + t\delta y(x)].$$

Так как функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x)$ локального экстремума, то у функции $\varphi(t)$ точка $t = 0$ является точкой локального экстремума. Следовательно, если производная $\varphi'(0)$ существует, то $\varphi'(0) = 0$. Существование производной $\varphi'(0)$ следует из существования вариации функционала $\Phi[y(x)]$ на $y_0(x)$

$$\frac{d}{dt}\varphi(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0}.$$

Следовательно,

$$\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt}\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0} = 0$$

для любой $\delta y(x)$. Теорема 5.1.1 доказана. $\square$

5.2. Уравнение Эйлера

Рассмотрим множество M непрерывно дифференцируемых на $[x_0, x_1]$ функций $y(x)$ таких, что $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$. Определим на этом множестве функционал

$$\Phi[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx, \tag{5.1}$$

где $F(x, y, p)$ – заданная функция трех переменных.

Получим необходимое условие экстремума функционала на множестве M.

Теорема 5.2.1. *Предположим, что при $x \in [x_0, x_1]$, $(y, p) \in \mathbb{R}^2$ у функции $F(x, y, p)$ существуют непрерывные вторые частные производные. Если функционал (5.1) достигает локального экстремума на функции $y_0(x) \in M$, имеющей непрерывную вторую производную на отрезке $[x_0, x_1]$, то функция $y_0(x)$ является решением дифференциального уравнения*

$$F_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx}F_p(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1. \tag{5.2}$$

Доказательство. Найдем вариацию функционала (5.1) на $y_0(x)$. Из определения множества M следует, что допустимой вариацией $\delta y(x)$ функции $y_0(x)$ является любая непрерывно дифференцируемая на отрезке $[x_0, x_1]$ функция, обращающаяся в ноль на концах этого отрезка (см. рис. 5.2). То есть $\delta y(x) \in C_0^1[x_0, x_1]$.

Используя определение вариации функционала, получим

$$\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt}\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0} =$$

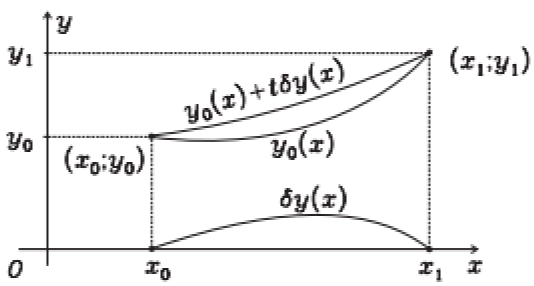


Рис. 5.2. К доказательству теоремы 5.2.1.

$$= \frac{d}{dt}\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y_0(x) + t\delta y(x), y_0'(x) + t(\delta y)'(x))dx\Big|_{t=0} =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_1} \Big\{ F_y(x, y_0(x) + t\delta y(x), y_0'(x) + t(\delta y)'(x))\delta y(x) +$$

$$+ F_p(x, y_0(x) + t\delta y(x), y_0'(x) + t(\delta y)'(x))(\delta y)'(x) \Big\} dx\Big|_{t=0} =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_1} \Big\{ F_y(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y(x) + F_p(x, y_0(x), y_0'(x))(\delta y)'(x) \Big\} dx$$

Из теоремы о необходимом условии экстремума следует, что вариация функционала на $y_0(x)$ должна равняться нулю, то есть

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} F_y(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y(x)dx + \int\limits_{x_0}^{x_1} F_p(x, y_0(x), y_0'(x))(\delta y)'(x)dx = 0.$$

Интегрируя по частям второй интеграл и учитывая то, что

$$\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0,$$

получим

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \Big\{ F_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx} F_p(x, y_0(x), y_0'(x)) \Big\} \delta y(x) dx = 0.$$

Это равенство выполнено для любой функции $\delta y(x) \in C_0^1[x_0, x_1]$. Применяя основную лемму вариационного исчисления, имеем

$$F_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx} F_p(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1.$$

Следовательно, функция $y_0(x)$ является решением уравнения (5.2) и теорема 5.2.1 доказана. $\square$

Уравнение (5.2) называется уравнением Эйлера для функционала (5.1). Так как функция $y_0(x)$, на которой достигается экстремум функционала (5.1), принадлежит множеству M, то она является решением следующей краевой задачи

$$\begin{aligned}
&F_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} F_p(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \\
&y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.
\end{aligned}$$

Рассмотрим пример применения доказанной теоремы.

Во многих приложениях, например, при обработке изображений, требуется приблизить некоторую функцию $f(x)$ более гладкой функцией $y(x)$. Это означает, что производная $y'(x)$ не должна иметь слишком большие значения. Для решения подобных задач может быть применено вариационное исчисление. Пусть $f(x)$ такова, что $f(x_0) = f(x_1) = 0$. Рассмотрим задачу нахождения минимума следующего функционала

$$\int_{x_0}^{x_1} (y(x) - f(x))^2 dx + \alpha \int_{x_0}^{x_1} (y'(x))^2 dx, \tag{5.3}$$

где α – положительный параметр. Минимизация первого интеграла обеспечивает близость функции $y(x)$ к исходной $f(x)$, а минимизация второго интеграла приводит к тому, что значения производной $y'(x)$ не будут слишком большими.

Для решения задачи минимизации функционала (5.3) на множестве функций $y(x)$ таких, что $y(x) \in C^1[x_0, x_1]$, $y(x_0) = y(x_1) = 0$, запишем уравнение Эйлера для функционала (5.3). Так как в этом случае

$$F(x, y, p) = (y - f(x))^2 + \alpha p^2, \ F_y(x, y, p) = 2(y - f(x)), \ F_p(x, y, p) = 2\alpha p,$$

то уравнение Эйлера имеет вид

$$2(y(x) - f(x)) - \frac{d}{dx}(2\alpha y'(x)) = 0.$$

Преобразуя это уравнение и учитывая краевые условия, получим краевую задачу для определения функции $y(x)$

$$y''(x) - (\alpha)^{-1}y(x) = -(\alpha)^{-1}f(x), \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \tag{5.4}$$

$$y(x_0) = y(x_1) = 0. \tag{5.5}$$

Так как уравнение Эйлера дает необходимое условие экстремума, то можно утверждать, что, если минимум функционала (5.3) достигается на дважды непрерывно дифференцируемой функции, то эта функция является решением краевой задачи (5.4), (5.5). Заметим, что однородная ($f(x) = 0$) краевая задача (5.4), (5.5) имеет только нулевое решение, следовательно, решение краевой задачи (5.4), (5.5) существует и единственно для любой $f(x)$. Можно доказать, что это решение будет минимизировать функционал (5.3).

20. Теорема о необходимом условии экстремума для функционала, содержащего производные высших порядков.

5.3.1. Функционал, зависящий от производных порядка выше первого

Рассмотрим множество M функций $y(x) \in C^n[x_0, x_1]$ таких, что

$$y(x_0) = y_{00},\ y'(x_0) = y_{01},\ y''(x_0) = y_{02},\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}, \tag{5.6}$$

$$y(x_1) = y_{10},\ y'(x_1) = y_{11},\ y''(x_1) = y_{12},\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_1) = y_{1n-1}. \tag{5.7}$$

Определим на этом множестве функционал

$$\Phi[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))dx, \tag{5.8}$$

где функция $F(x, y, p_1, \ldots, p_n)$ определена и непрерывна при $x \in [x_0, x_1]$, $(y, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Получим необходимое условие экстремума функционала (5.8) на множестве M.

Теорема 5.3.1. *Пусть функция $F(x, y, p_1, \dots, p_n)$ имеет при $x \in [x_0, x_1]$, $(y, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ непрерывные частные производные порядка $2n$. Если функция $y(x) \in M$, $y(x) \in C^{2n}[x_0, x_1]$, и на ней достигается экстремум функционала (5.8) на множестве M, то $\bar{y}(x)$ является решением уравнения*

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{p_1} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{p_n} = 0, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \tag{5.9}$$

где $F = F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))$.

Доказательство. В силу необходимого условия экстремума вариация функционала (5.8) на функции $\bar{y}(x)$ должна обращаться в ноль для любой допустимой вариации $\delta y(x) \in C_0^n[x_0, x_1]$.

По определению вариации функционала имеем

$$\delta \Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt} \Phi[\bar{y}(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt} \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, \bar{y}(x) + t\delta y(x), \bar{y}'(x) + t(\delta y)'(x), \dots, \bar{y}^{(n)}(x) + t(\delta y)^{(n)}(x)) dx\Big|_{t=0}.$$

Дифференцируя интеграл по параметру t, полагая затем $t = 0$ и приравнивая вариацию к нулю, получим

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \big(F_y \delta y(x) + F_{p_1} (\delta y)'(x) + \dots + F_{p_n} (\delta y)^{(n)}(x)\big) dx = 0.$$

Интегрируя по частям и учитывая то, что функция $\delta y(x)$ и ее производные обращаются в ноль на концах отрезка, имеем

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \Big(F_y - \frac{d}{dx} F_{p_1} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{p_n}\Big) \delta y(x) dx = 0.$$

Так как это равенство выполнено для любой функции $\delta y(x) \in C_0^n[x_0, x_1]$, то, применяя основную лемму вариационного исчисления, получим, что функция $\bar{y}(x)$ является решением дифференциального уравнения (5.9). Теорема 5.3.1 доказана. □

Таким образом, мы показали, что, если на функции $\bar{y}(x) \in C^{2n}[x_0, x_1]$ достигается экстремум функционала (5.8) на множестве M, то эта функция является решением краевой задачи (5.9), (5.6), (5.7).

В качестве примера применения доказанной теоремы рассмотрим задачу приближения функции $f(x)$ более гладкой функцией $y(x)$. В отличие от примера из предыдущего параграфа будем требовать, чтобы значения не только первой производной, но и второй производной функции $y(x)$, были невелики.

Рассмотрим задачу нахождения минимума функционала

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(y(x) - f(x)\right)^2 dx + \alpha \int_{x_0}^{x_1} \left((y'(x))^2 + (y''(x))^2\right) dx, \tag{5.10}$$

где α – положительный параметр. Будем предполагать, что функция $f(x)$ такова, что $f(x_0) = f(x_1) = 0$, $f'(x_0) = f'(x_1) = 0$ и рассмотрим задачу минимизации функционала (5.10) на множестве функций $y(x)$ таких, что $y(x) \in C^2[x_0, x_1]$, $y(x_0) = y(x_1) = 0$, $y'(x_0) = y'(x_1) = 0$. Так как в этом случае функция

$$F(x, y, p_1, p_2) = (y - f(x))^2 + \alpha p_1^2 + \alpha p_2^2,$$

то уравнение (5.9) имеет вид

$$2(y(x) - f(x)) - \frac{d}{dx}(2\alpha y'(x)) + \frac{d^2}{dx^2}(2\alpha y''(x)) = 0.$$

Преобразуя это уравнение и учитывая краевые условия $y(x_0) = y(x_1) = 0$, $y'(x_0) = y'(x_1) = 0$, получим краевую задачу для определения функции $y(x)$

$$\begin{gathered} y^{(4)}(x) - y''(x) + (\alpha)^{-1} y(x) = (\alpha)^{-1} f(x), \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \\ y(x_0) = y'(x_0) = 0, \quad y(x_1) = y'(x_1) = 0. \end{gathered}$$

21. Теорема о необходимом условии экстремума для функционала, зависящего от функции двух переменных.

Задачи вариационного исчисления можно рассматривать и для функционалов, зависящих от функции двух переменных. Рассмотрим функционал, зависящий от функции $u(x, y)$ и ее частных производных первого порядка

$$\Phi[u(x, y)] = \iint_D F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) dx dy, \tag{5.11}$$

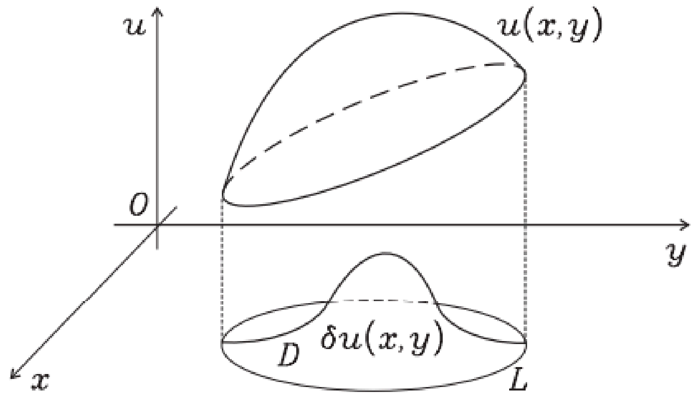


Рис. 5.3.

где $F(x, y, u, p, q)$ – заданная функция, а D – область, ограниченная контуром L. Будем предполагать, что функция $F(x, y, u, p, q)$ имеет непрерывные вторые частные производные при $(x, y) \in \overline{D} = D \cup L$, $(u, p, q) \in \mathbb{R}^3$.

Пусть M – множество функций $u(x, y)$, имеющих в $\overline{D}$ непрерывные частные производные и принимающих на L заданные значения $u(x, y) = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in L$. Вариация функции $u(x, y)$, не выводящая ее из множества M, – это функция $\delta u(x, y)$, имеющая в $\overline{D}$ непрерывные частные производные и обращающаяся в ноль на L, то есть $\delta u(x, y) = 0$, $(x, y) \in L$ (см. рис. 5.3).

Получим необходимое условие экстремума функционала (5.11). Для этого нам потребуется лемма, аналогичная основной лемме вариационного исчисления

Лемма 5.3.1. *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в $\overline{D}$. Если*

$$\iint\limits_{D} f(x, y)v(x, y)dxdy = 0$$

для любой функции $v(x, y)$, имеющей непрерывные частные производные в $\overline{D}$ и обращающейся в ноль на контуре L, то $f(x, y) = 0$, $(x, y) \in \overline{D}$.

Доказательство. Предположим, что функция $f(x, y)$ отлична от нуля в $\overline{D}$. Тогда существует точка $(x_0, y_0) \in D$ такая, что $f(x_0, y_0) \neq 0$. Пусть для определенности $f(x_0, y_0) > 0$. Из непрерывности $f(x, y)$ в точке

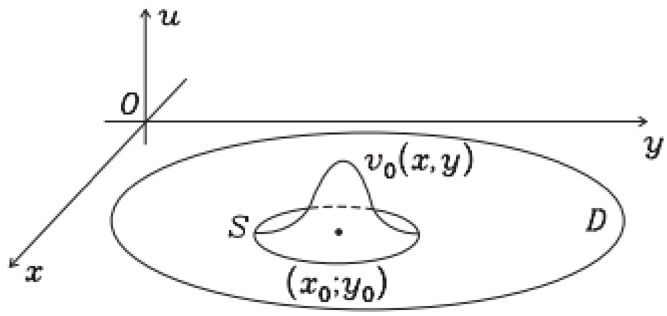


Рис. 5.4. К доказательству леммы 5.3.1.

(x_0, y_0) следует, что существует круг

$$S = \{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\}$$

такой, что $f(x, y) \geqslant \dfrac{f(x_0, y_0)}{2} > 0$ при $(x, y) \in S \subset \overline{D}$. Рассмотрим функцию $v_0(x, y)$ такую, что (см. рис. 5.4)

$$v_0(x, y) = \begin{cases} \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - \varepsilon^2\right)^2, & (x, y) \in S; \\ 0, & (x, y) \in \overline{D} \backslash S. \end{cases}$$

Тогда

$$\iint\limits_D f(x, y) v_0(x, y) dx dy = \iint\limits_S f(x, y) v_0(x, y) dx dy \geqslant$$

$$\geqslant \frac{f(x_0, y_0)}{2} \iint\limits_S v_0(x, y) dx dy > 0,$$

что противоречит условию леммы. Полученное противоречие показывает, что исходное предположение было неверно. Лемма 5.3.1 доказана. □

Теорема 5.3.2. *Предположим, что функция $F(x, y, u, p, q)$ имеет непрерывные вторые частные производные при $(x, y) \in \overline{D}$, $(u, p, q) \in \mathbb{R}^3$. Если экстремум функционала (5.11) достигается на функции $\bar{u}(x, y) \in M$, имеющей непрерывные вторые частные производные в $\overline{D}$, то эта функция является решением уравнения в частных производных*

$$F_u - \frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{\partial F_q}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in D. \tag{5.12}$$

Доказательство. Пусть экстремум функционала (5.11) достигается на функции $\bar{u}(x,y) \in M$, имеющей непрерывные вторые частные производные в $\overline{D}$. Из необходимого условия экстремума следует, что вариация функционала (5.11) на этой функции равна нулю

$$\delta\Phi[\bar{u}(x,y), \delta u(x,y)] = \frac{d}{dt}\Phi[\bar{u}(x,y) + t\delta u(x,y)]\Big|_{t=0} = 0,$$

то есть

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_D F(x,y,w(x,y,t),w_x(x,y,t),w_y(x,y,t))dxdy\Big|_{t=0} = 0,$$

где $w(x,y,t) = \bar{u}(x,y) + t\delta u(x,y)$. Дифференцируя по t под знаком интеграла и полагая t равным нулю, получим

$$\iint\limits_D F_u(x,y,\bar{u},\bar{u}_x,\bar{u}_y)\delta u(x,y)dxdy +$$
$$+ \iint\limits_D \Big\{F_p(x,y,\bar{u},\bar{u}_x,\bar{u}_y)(\delta u)_x(x,y) +$$
$$+ F_q(x,y,\bar{u},\bar{u}_x,\bar{u}_y)(\delta u)_y(x,y)\Big\}dxdy = 0. \quad (5.13)$$

Преобразуем это равенство. Очевидно, что

$$F_p(x,y,\bar{u},\bar{u}_x,\bar{u}_y)(\delta u)_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\big(F_p\delta u\big) - \frac{\partial F_p}{\partial x}\cdot\delta u,$$
$$F_q(x,y,\bar{u},\bar{u}_x,\bar{u}_y)(\delta u)_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\big(F_q\delta u\big) - \frac{\partial F_q}{\partial y}\cdot\delta u.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_D \Big\{F_p(x,y,\bar{u},\bar{u}_x,\bar{u}_y)(\delta u)_x(x,y) + F_q(x,y,\bar{u},\bar{u}_x,\bar{u}_y)(\delta u)_y(x,y)\Big\}dxdy =$$
$$= \iint\limits_D \Big(\frac{\partial}{\partial x}\big(F_p\delta u\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big(F_q\delta u\big)\Big)dxdy - \iint\limits_D \Big(\frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial F_q}{\partial y}\Big)\delta u\,dxdy.$$

Применяя формулу Грина к интегралу

$$\iint\limits_D \Big(\frac{\partial}{\partial x}(F_p\delta u) + \frac{\partial}{\partial y}(F_q\delta u)\Big)dxdy$$

и учитывая то, что $\delta u(x,y)=0$, $(x,y)\in L$, получим

$$\iint\limits_D \Big(\frac{\partial}{\partial x}(F_p\delta u)+\frac{\partial}{\partial y}(F_q\delta u)\Big)dxdy=\oint\limits_L (F_p\delta u dy - F_q\delta u dx)=0.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_D \{F_p(x,y,\bar u,\bar u_x,\bar u_y)(\delta u)_x(x,y)+F_q(x,y,\bar u,\bar u_x,\bar u_y)(\delta u)_y(x,y)\}dxdy=$$
$$=-\iint\limits_D \Big(\frac{\partial F_p}{\partial x}+\frac{\partial F_q}{\partial y}\Big)\delta u\,dxdy,$$

и равенство (5.13) принимает вид

$$\iint\limits_D \Big\{F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_p-\frac{\partial}{\partial y}F_q\Big\}\delta u(x,y)\,dxdy=0,$$

где F_u, F_p, F_q вычисляются в точке $(x,y,\bar u(x,y),\bar u_x(x,y),\bar u_y(x,y))$. Так как полученное равенство выполнено для любой допустимой вариации $\delta u(x,y)$, то, применяя лемму 5.3.1, получаем, что функция $\bar u(x,y)$ является решением уравнения (5.12). Теорема 5.3.2 доказана. □

22. Теорема о необходимом условии экстремума в случае задачи на условный экстремум.

Рассмотрим два функционала

$$\Phi[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx \tag{5.14}$$

и

$$\Psi[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} G(x, y(x), y'(x))dx, \tag{5.15}$$

где $F(x, y, p)$, $G(x, y, p)$ – заданные дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов.

Рассмотрим следующую экстремальную задачу. Пусть требуется найти функцию $\bar{y}(x)$, на которой достигается экстремум функционала (5.14) на множестве функций

$$M_\Psi = \left\{y(x) \in C^1[x_0, x_1] : \ y(x_0) = y_0, \ y(x_1) = y_1, \ \Psi[y(x)] = \ell\right\}. \tag{5.16}$$

Таким образом, нам нужно найти экстремум функционала (5.14) на множестве функций определяемом тем условием, что функционал (5.15) принимает на этом множестве постоянное значение. Вариационные задачи такого типа называются задачами на *условный экстремум.*

Найдем вариацию функционала (5.15) на множестве функций

$$M = \{y(x) \in C^1[x_0, x_1] : \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1\}.$$

Пусть $\delta y(x)$ – допустимая вариация функции на M, то есть

$$\delta y(x) \in C^1[x_0, x_1], \quad \delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0.$$

Тогда вариация функционала $\Psi[y(x)]$ на функции $\tilde{y}(x) \in M$ равна

$$\delta\Psi[\tilde{y}(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt}\Psi[\tilde{y}(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0}.$$

Дифференцируя по t и полагая $t = 0$, получаем

$$\delta\Psi[\tilde{y}(x), \delta y(x)] = \\ = \int\limits_{x_0}^{x_1} \Big\{G_y(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x))\delta y(x) + G_p(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x))(\delta y)'(x)\Big\}dx. \quad (5.17)$$

Сформулируем условие, необходимое для того, чтобы на функции $\bar{y}(x)$ достигался экстремум функционала (5.14) на множестве M_Ψ.

Теорема 5.4.1. *Пусть на функции $\bar{y}(x) \in M_\Psi$, $\bar{y}(x) \in C^2[x_0, x_1]$, достигается экстремум функционала (5.14) на множестве M_Ψ. Если существует функция*

$$\delta y_0(x) \in C^1[x_0, x_1], \quad \delta y_0(x_0) = \delta y_0(x_1) = 0$$

такая, что вариация $\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] \neq 0$, то найдется число λ такое, что $\bar{y}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$L_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx}L_p(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \quad (5.18)$$

где

$$L(x, y, p) = F(x, y, p) + \lambda G(x, y, p). \quad (5.19)$$

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $\delta y(x)$ такую, что $\delta y(x) \in C^1[x_0, x_1]$, $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$. Рассмотрим функции

$$\varphi(t, \tau) = \Phi[\bar{y}(x) + t\delta y(x) + \tau\delta y_0(x)],$$

$$\psi(t, \tau) = \Psi[\bar{y}(x) + t\delta y(x) + \tau\delta y_0(x)],$$

где t, τ – произвольные действительные числа.

Из определения функций $\varphi(t, \tau)$ и $\psi(t, \tau)$ следует, что

$$\varphi(0, 0) = \Phi[\bar{y}(x)], \quad \psi(0, 0) = \Psi[\bar{y}(x)],$$

$$\varphi_t(0, 0) = \delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)], \quad \varphi_\tau(0, 0) = \delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)],$$

$$\psi_t(0,0) = \delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y(x)], \quad \psi_\tau(0,0) = \delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)].$$

Покажем, что для любых $\delta y(x) \in C_0^1[x_0, x_1]$ якобиан

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(t, \tau)}\Big|_{t=\tau=0} = \det \begin{pmatrix} \delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)], & \delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] \\ \delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y(x)], & \delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] \end{pmatrix} = 0. \quad (5.20)$$

Предположим, что это не так и существует $\delta\tilde{y}(x)$ такая, что для нее якобиан

$$\det \begin{pmatrix} \delta\Phi[\bar{y}(x), \delta\tilde{y}(x)], & \delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] \\ \delta\Psi[\bar{y}(x), \delta\tilde{y}(x)], & \delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] \end{pmatrix} \neq 0.$$

Тогда из теоремы о неявных функциях следует, что при $\delta y(x) = \delta\tilde{y}(x)$ система

$$\varphi(t, \tau) = u, \quad \psi(t, \tau) = v$$

однозначно разрешима для (u, v), находящихся в достаточно малой окрестности (u_0, v_0), где $u_0 = \varphi(0, 0)$, $v_0 = \psi(0, 0)$.

Пусть, для определенности, $\bar{y}(x)$ – функция, на которой достигается локальный минимум задачи на условный экстремум. Рассмотрим систему

$$\varphi(t, \tau) = \varphi(0, 0) - \varepsilon = \Phi[\bar{y}(x)] - \varepsilon,$$
$$\psi(t, \tau) = \psi(0, 0) = \Psi[\bar{y}(x)] = \ell,$$

где ε – достаточно малое положительное число. Так как

$$(\varphi(0, 0) - \varepsilon, \psi(0, 0))$$

находится в достаточно малой окрестности точки (u_0, v_0), то по теореме о неявной функции система имеет единственное решение t_ε, τ_ε. Это означает, что

$$\varphi(t_\varepsilon, \tau_\varepsilon) = \Phi[\bar{y}(x) + t_\varepsilon \delta\tilde{y}(x) + \tau_\varepsilon \delta y_0(x)] = \Phi[\bar{y}(x)] - \varepsilon,$$

$$\psi(t_\varepsilon, \tau_\varepsilon) = \Psi[\bar{y}(x) + t_\varepsilon \delta\tilde{y}(x) + \tau_\varepsilon \delta y_0(x)] = \ell.$$

Следовательно, на функции $\bar{y}(x) + t_\varepsilon \delta\tilde{y}(x) + \tau_\varepsilon \delta y_0(x)$, принадлежащей множеству M_Ψ, функционал (5.14) принимает значение меньшее, чем на $\bar{y}(x)$. Это противоречит тому, что на функции $\bar{y}(x)$ достигается локальный минимум. Из полученного противоречия следует справедливость равенства (5.20).

Раскрывая определитель, входящий в равенство (5.20), получаем

$$\delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)]\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] - \delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)]\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y(x)] = 0$$

для всех $\delta y(x) \in C_0^1[x_0, x_1]$. По условию теоремы $\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] \neq 0$. Поделив на $\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)]$ и обозначив через

$$\lambda = -\frac{\delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)]}{\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)]},$$

получим

$$\delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)] + \lambda\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y(x)] = 0.$$

Учитывая формулы для $\delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)]$ и $\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y(x)]$, это равенство можно переписать так:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \Big\{ F_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) + \lambda G_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \Big\} \delta y(x) dx +$$
$$+ \int\limits_{x_0}^{x_1} \Big\{ F_p(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) + \lambda G_p(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \Big\} \delta y'(x) dx = 0.$$

Интегрируя по частям второй интеграл и учитывая определение (5.19) функции $L(x, y, p)$, имеем

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \Big\{ L_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) - \frac{d}{dx} L_p(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))] \Big\} \delta y(x) dx = 0,$$
$$\forall \delta y(x) \in C_0^1[x_0, x_1].$$

Применяя основную лемму вариационного исчисления, получим, что функция $\bar{y}(x)$ удовлетворяет уравнению (5.18). Теорема 5.4.1 доказана.

□

Из теоремы 5.4.1 следует, что для определения функции, которая может являться решением задачи на условный экстремум, нужно решить уравнение (5.18). Это дифференциальное уравнение второго порядка, и его решение зависит, вообще говоря, от двух произвольных постоянных и вспомогательного параметра λ. Эти постоянные и параметр могут быть найдены из краевых условий $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, а также условия $\Psi[y(x)] = \ell$.

23. Вариационное свойство собственных значений и собственных функций задачи Штурма Лиувилля.

5.5. Вариационное свойство собственных функций и собственных значений задачи Штурма-Лиувилля

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля. Требуется найти значения λ, при которых краевая задача

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y = -\lambda y, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{5.21}$$

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \tag{5.22}$$

имеет ненулевое решение. Эти значения λ_n называются собственными значениями, а соответствующие им решения $y_n(x)$ – собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля. Собственные функции определены с точностью до произвольного постоянного сомножителя. Чтобы устранить эту неоднозначность, введем следующее условие:

$$\int\limits_0^l (y_n(x))^2 dx = 1. \tag{5.23}$$

Рассмотрим функционал

$$\Phi[y(x)] = \int\limits_0^l \left(k(x)(y'(x))^2 + q(x)(y(x))^2\right) dx. \tag{5.24}$$

Покажем, что, если $y_n(x)$ – собственная функция задачи Штурма-Лиувилля (5.21), (5.22), соответствующая собственному значению λ_n, то

$$\Phi[y_n(x)] = \lambda_n. \tag{5.25}$$

Действительно, так как

$$\int\limits_0^l k(x)(y_n'(x))^2 dx = \int\limits_0^l k(x)y_n'(x)y_n'(x)dx =$$

$$= k(x)y_n'(x)y_n(x)\Big|_{x=0}^{x=l} - \int\limits_0^l (k(x)y_n'(x))'y_n(x)dx = -\int\limits_0^l (k(x)y_n'(x))'y_n(x)dx,$$

то

$$\Phi[y_n(x)] = \int\limits_0^l \left(k(x)(y_n'(x))^2 + q(x)(y_n(x))^2\right) dx =$$

$$= -\int\limits_0^l \left((k(x)y_n'(x))' - q(x)y_n(x)\right) y_n(x)dx = \lambda_n \int\limits_0^l (y_n(x))^2 dx = \lambda_n.$$

Рассмотрим задачу минимизации функционала (5.24) на множестве функций, удовлетворяющих условиям (5.22) и (5.23). Запишем условие (5.23) в виде

$$\Psi[y(x)] = 1, \qquad \Psi[y(x)] = \int\limits_0^l (y(x))^2 dx.$$

Пусть минимум достигается на функции $\bar{y}(x) \in C^2[0,l]$. Из необходимого условия для решения задачи на условный экстремум получим, что $\bar{y}(x)$ является решением уравнения

$$L_y - \frac{d}{dx} L_p = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{5.26}$$

где $L(x,y,p) = k(x)p^2 + q(x)y^2 - \lambda y^2$. Перепишем уравнение (5.26), учитывая вид функции $L(x,y,p)$:

$$2q(x)y(x) - 2\lambda y(x) - 2(k(x)y'(x))' = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Таким образом, функция $\bar{y}(x)$ является решением уравнения (5.21) и удовлетворяет условиям (5.22). Кроме того, она не равна тождественно нулю, поскольку удовлетворяет условию (5.23). Следовательно, $\bar{y}(x)$ является собственной функцией задачи Штурма-Лиувилля (5.21), (5.22). Обозначим ее $y_1(x)$, λ_1 – соответствующее ей собственное значение. Из (5.25) следует, что $\Phi[y_1(x)] = \lambda_1$.

Таким образом, мы показали, что решение задачи на условный экстремум (5.24), (5.23) является собственной функцией задачи Штурма-Лиувилля, а соответствующее собственное значение представляет собой величину функционала (5.24) на этой собственной функции.